TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MINTTU RAHKOLA

AMK-INSINÖÖRIEN MATEMATIIKAN OSAAMINEN SIIRRYTTÄESSÄ TTY:LLE MAISTERIVAIHEESEEN

Diplomityö

Tarkastajat: Yliop.leh. Simo Ali-Löytty,
leht. Terhi Kaarakka
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 12.08.2015

TIIVISTELMÄ

MINTTU RAHKOLA: AMK-insinöörien matematiikan osaaminen siirryttäessä TTY:lle maisterivaiheeseen
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 68 sivua, 14 liitesivua
Maaliskuu 2016
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Yliop.leht. Simo Ali-Löytty, leht. Terhi Kaarakka
Avainsanat: Matematiikan opetus, Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopinnot, Tampereen ammattikorkeakoulun matematiikan opintojaksot

Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) matematiikan perusopinnot ovat 27 opintopistettä (op), joista 15 op on kaikille opiskelijoille samoja Insinöörimatematiikan opintojaksoja. Tampereen ammattikorkeakoulussa (TAMK) kaikki insinöörialojen opiskelijat opiskelevat matematiikkaa yhteensä 12 op. Näiden opintojaksojen sisältöjä verratessa huomattiin, että otsikkotasolla aiheet ovat suurelta osin samoja, mutta käsittelyn syvällisyys ja perustelut eroavat toisistaan. TTY:n puolella tulokset pyritään mahdollisuuksien mukaan loogisesti perustelemaan. Erityisesti matriisien osalta käsittely on TTY:n opintojaksoilla laajempaa.

Kun verrattiin ensimmäisen vuoden ja suoraan maisterivaiheeseen tulleiden opiskelijoiden menestystä Insinöörimatematiikan opintojaksoilla huomattiin, että Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla ensimmäisen vuoden opiskelijoiden keskiarvo oli parempi kuin muilla. Muiden opintojaksojen osalta vastaavaa johtopäätöstä ei voitu tehdä, koska aineiston koko oli liian pieni ja tulosten luotettavuus jäi heikoksi.

Nykyisen käytännön mukaan ammattikorkeakoulussa (AMK) suoritettuja matematiikan opintoja ei hyväksytä osaksi tutkintoa TTY:ssa. Tiivistyvä yhteistyö ja paine sujuvampiin opintopolkuihin on luonut tarpeen arvioida, voisiko AMK:ssa suoritettuja matematiikan opintoja hyödyntää yliopisto-opetuksessa. Sisältövertailun perusteella suunniteltu Siltakurssi on tarkoitettu TTY:lle maisterivaiheeseen tuleville AMK-insinööreille, jotta heidän matematiikan osaamisensa saadaan samalle tasolle tekniikan kandidaattien kanssa. Opintojakso koostuu moduuleista, joihin kuuluu käänteiseen opetukseen perustuen viikkoharjoitukset ja verkkotehtäviä sekä ennen harjoitustilaisuuksia katsottavia videoita ja teoriaosuus monisteesta. Moduulit on jaettu kolmeen osaan, joista jokaisesta järjestetään sähköinen EXAM-koe.

ABSTRACT

MINTTU RAHKOLA: Mathematical knowledge of engineers from university of applied sciences when transfering to a TUT Master's programme
Tampere University of Technology
Master of Science Thesis, 68 pages, 14 Appendix pages
March 2016
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: Univ.lect. Simo Ali-Löytty, lect. Terhi Kaarakka
Keywords: Mathematics teaching, mathematics basic studies at Tampere University of Technology, mathematics courses at Tampere University of Applied Sciences

Mathematics basic studies at Tampere University of Technology (TUT) include 27 credits of engineering mathematics courses and 15 credits of them are same for every student. At Tampere University of Applied Sciences (TAMK) there are mathematics courses worth of 12 credits that are same for every engineering student. When was compared TUT's and TAMK's mathematics courses it was discovered that the topics are quite similar, but processing wasn't as in-depth at TAMK as at TUT. At TUT, results are validated if possible. Especially in matrix algebra at TUT students study more precisely.

While comparing the results of engineering mathematics for first year students and students who entered the Master's Programme directly, it was discovered that first year students had a better grade average than the other two groups. For other courses similar conclusions were impossible to be made, since the sample size was too small and the results were not reliable enough.

Currently, mathematics studies from university of applied sciences are not be accepted at TUT. Cooperation and more adaptable studies will generate strain to assess, could present mathematics studies be tapped at TUT. After comparing contents, a bridging course was planned for students who enter the Master's Programme with a Bachelor of Engineering degree. The aim of the course is to give these students the same abilities in mathematics as TUT's students. The bridging course consists of modules, which include videos and written material for study before exercises, similar to the flipped classroom method. There are normal and online exercises. Exercise meetings are once a week. The modules in the bridging course are divided among three electronic exams called EXAM.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Työn tekeminen alkoi kesällä 2015 tutkiessani Tampereen ammattikorkeakoulun ja Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopintojen sisältöjä sekä selvittäessäni ensimmäisen vuoden opiskelijoiden ja suoraan maisterivaiheeseen tulleiden AMK-insinöörien matematiikan opintojen etenemistä Tampereen teknillisessä yliopistossa. Diplomityön kirjoittaminen ajoittui kesän 2015 ja alkuvuoden 2016 väliin.

Haluan kiittää Matematiikan laitosta mahdollisuudesta paneutua minua kiinnostavaan matematiikan opetuksen tutkimukseen keskittyvään aiheeseen. Kiitos myös lehtori Terhi Kaarakalle ja yliopistonlehtori Simo Ali-Löytylle työn tarkastamisesta ja kommenteista sen aikana. Lisäksi haluan kiittää työtovereitani tuesta ja tsemppauksesta työn teon eri vaiheissa. Erityiskiitoksen ansaitsee ystäväni Siiri viimeistely- ja oikolukuavusta. Suurin kiitos kuuluu perheelleni ja ystävilleni, jotka ovat kannustaneet minua eteenpäin elämässä ja opinnoissa.

Tampereella helmikuussa 2016

Minttu Rahkola

SISÄLLYS

1. Johdanto 1

 1.1 Tutkimuksen tavoitteet 2

 1.2 Työn rakenne 2

 1.3 Matematiikan opetuksen eurooppalainen viitekehys 3

2. TAMK:n matematiikan oppisisällöt verrattuna TTY:n sisältöihin 5

 2.1 Joukko-oppi, logiikka ja funktio-oppi 7

 2.2 Reaalianalyysi 7

 2.3 Kompleksianalyysi 10

 2.4 Vektorit ja lineaariset yhtälöryhmät 10

 2.5 Matriisilaskenta 13

 2.6 Sarjateoria 15

 2.7 Differentiaaliyhtälöt 15

 2.8 TAMK:n koulutusohjelmakohtaiset ja vapaasti valittavat opintojaksot 17

  2.8.1 Tekniikan tilastomatematiikka 17

  2.8.2 Integraalimuunnokset 19

  2.8.3 Diskreetit järjestelmät 21

  2.8.4 Tietokoneavusteinen matematiikka 22

 2.9 Suurimmat erot TTY:n ja TAMK:n välillä 22

3. Opintomenestys Insinöörimatematiikan opintojaksoilla 23

4. Monimuoto-opetuksen teoriaa 27

 4.1 Oppimisen käsitteitä 27

 4.2 Konstruktivismi 28

 4.3 Käänteinen opetus 29

 4.4 Oppiminen ja ohjaus verkossa 33

 4.5 Arviointi 36

4.5.1 Arvioinnin periaatteita 36
4.5.2 SOLO-mallin sovellus vastauksien arvioinnissa 37
5. Siltakurssi 41
5.1 Lähtötasotesti 41
5.2 Opintojakson rakenne 42
5.3 Moduulien ja EXAM-kokeiden sisältö 45
5.3.1 Matlabin alkeet 45
5.3.2 Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen 45
5.3.3 Kompleksiluvut 47
5.3.4 Derivaatta ja integraali 48
5.3.5 Vektorit ja analyyttinen geometria 49
5.3.6 1. EXAM-koe 51
5.3.7 Lineaariset yhtälöryhmät 54
5.3.8 Matriisit 55
5.3.9 Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste 56
5.3.10 Determinantit 57
5.3.11 Ominaisarvot ja -vektorit 58
5.3.12 Loput moduulit ja EXAM-kokeet 59
6. Yhteenveto 60
6.1 Sisältöerot matematiikan opintojaksoilla 60
6.2 Opintomenestys Insinöörimatematiikassa 61
6.3 Siltakurssin perusteet 61
6.4 Jatkokysymykset 63
Lähteet 65
A. Koulutusohjelmakohtaiset opintojaksot 69
B. Täydentävien opintojen sisältö 71
C. TTY:n ja TAMK:n opintojaksojen yhtäläisyydet ja erot 72

D. Ensimmäinen EXAM-koe 76

E. Ensimmäisen kokeen mallivastaukset ja arvosteluohjeita 77

F. Esimerkkiharjoitus 82

LYHENTEET JA MERKINNÄT

AHOT	Aiemmin hankitun osaamisen tunnistaminen ja tunnustaminen
AMK	Ammattikorkeakoulu
CAS-laskin	Symbolinen laskin, CAS tulee sanoista Computer Algebra System
Echo360	Videopalvelu luentotallenteiden katsomista varten
EXAM	Sähköinen tenttijärjestelmä
h	Testisuure (Saa arvon 1, jos tutkittu väite jää voimaan käytetyllä luottamusvälillä)
IMA	Insinöörimatematiikan opintojakso
ka	Keskiarvo
luottamusväli	Ilmaisee lopputulokseen sisältyvän virhemarginaalin
Matlab	Matrix Laboratory -niminen matematiikan tietokoneohjelmisto
Moodle	Sähköinen oppimisympäristö
n_i	Aineiston i koko
nollahypoteesi	Hypoteesi, joka yritetään kumota testauksen avulla
op	Opintopiste
p	p-arvo, merkitsevyystaso
SEFI	The European Society for Engineering Education -kansalaisjärjestö
Stack-tehtävä	Automaattisesti tarkastettava tehtävä, joka tehdään tietokoneella
TAMK	Tampereen ammattikorkeakoulu
t-testi	Tilastollinen testi kahden ryhmän keskiarvojen erojen tutkimiseen
TTY	Tampereen teknillinen yliopisto
WolframAlpha	Internetistä löytyvä laskennallisen tiedon haku- ja vastauskone
YouTube	Googlen omistama videopalvelu

1. JOHDANTO

Tampereen teknillisestä yliopistosta (TTY) valmistuneiden diplomi-insinöörien opintoihin sisältyy 27 opintopistettä matematiikan perusopintoja, joista suurin osa kuuluu kandidaatin tutkintoon. Noin puolet koulutusohjelmista on sisällyttänyt kaikki perusopinnot tekniikan kandidaatin opintoihin. Loput koulutusohjelmat opiskelevat osan perusopinnoista vasta maisterivaiheessa. Liitteessä A olevassa taulukossa on eritelty, mitkä opintojaksot opiskellaan missäkin koulutusohjelmassa.

Tällä hetkellä suoraan maisterivaiheeseen valituilta opiskelijoilta, jotka eivät ole tekniikan kandidaatteja, vaaditaan täydentäviä opintoja 0-60 opintopistettä riippuen koulutusohjelmasta ja aikaisemmista opinnoista. Nämä opinnot eivät sisälly diplomi-insinöörin tutkintoon vaan ovat ylimääräisiä opintoja. Täydentäviin opintoihin kuuluu esimerkiksi esitietoina vaadittavia opintojaksoja, kuten matematiikan perusopintoja. Tarpeelliset täydentävät opinnot on määritelty koulutusohjelmakohtaisesti.

Seppo Pohjolaisen vuonna 2005 tekemän raportin mukaan Opetus- ja tutkimusneuvoston linjaus siitä, että AMK:ssa suoritettuja matematiikan opintoja ei hyväksytä TTY:ssa, on ollut perusteltu [32]. Raportissa todetaan, että AMK:n matematiikan opintojen lähtötaso, määrä ja käsittelytapa eivät vastaa yliopistotasoisen matematiikan vaatimuksia.

Matematiikan laitoksen kanta on, että ellei opiskelija ole suorittanut matematiikan opintoja yliopistotasolla, hänen tulee opiskella matematiikan perusopinnot osana täydentäviä opintojaan. Laitoksen kanta perustuu Pohjolaisen tekemään selvitykseen [32]. Matematiikan täydentävien opintojen sisällöt koulutusohjelmittain on esitetty liitteessä B. Käytäntö siitä, miten paljon ammattikorkeakoulututkinnon opinnoista on saanut hyväksi luettua TTY:ssa, on ollut varsin kirjava. Tällä diplomityöllä pyritään selkiyttämään käytäntöä. Tavoitteena on, että täydentävät opinnot suoritetaan opintojen alussa [44]. Näin ei kuitenkaan ole, kuten käy ilmi Perusopintojen nopeuttaminen -työryhmän raportista [33].

1.1 Tutkimuksen tavoitteet

Tutkimuksen tarkoituksena on ollut selvittää, kuinka paljon matematiikkaa ja millaisia sisältöjä opiskellaan ammattikorkeakoulujen tekniikan alan matematiikan opintojaksoilla. Sisältöanalyysissä on keskitytty erityisesti Tampereen ammattikorkeakoulun (TAMK) matematiikan opintojaksojen sisältöihin. Tavoitteena on ollut ottaa selvää, miten ammattikorkeakouluista tulevien maisterivaiheen opiskelijoiden matematiikan opinnot eroavat tekniikan kandidaattien opinnoista ja miten heille kuuluvat matematiikan täydentävät opinnot etenevät maisterivaiheessa Tampereen teknillisessä yliopistossa.

Vuoden 2005 Pohjolaisen selvityksen [32] jälkeen opintojaksojen sisältöjä on jouduttu muokkaamaan, koska lukio-opinnot ovat muuttuneet ja opiskelijoiden lähtötaso on heikentynyt. Lisäksi erillisistä tietokoneharjoituksista on luovuttu. Niihin kuulunut sisältö käydään nykyään läpi luennoilla ja Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksooon kuuluvalla Matlabin alkeet -osuudella, joka suoritetaan itseopiskeluna sähköisten materiaalien avulla. Lisäksi ohjelmaan on lisätty muun muassa kolmen tunnin ohjattuja viikkoharjoituksia. Myös verkossa tapahtuvaa opiskelua on lisätty.

Kun tässä diplomityössä puhutaan TTY:n opiskelijoista, tarkoitetaan kaikkia TTY:n opiskelijoita arkkitehteja ja Porin opiskelijoita lukuun ottamatta. TAMK:n opiskelijoista puhuttaessa tarkoitetaan Tampereen ammattikorkeakoulun tekniikan alan opiskelijoita. Sisältövertailu on tehty lukuvuoden 2014-2015 mukaisten TTY:n Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksojen ja TAMK:n tekniikan alan kaikille yhteisten opintojaksojen välillä. Lisäksi on tutustuttu TAMK:n tarjoamiin koulutusohjelmakohtaisiin ja vapaasti valittaviin opintojaksoihin. Kaikkien opintojaksojen osalta on pyritty löytämään yhteisiä sisältöjä, joita voisi mahdollisesti lukea hyväksi TTY:ssa. Liitteen C sisältövertailutaulukoissa on mukana myös TTY:n Johdatus yliopistomatematiikkaan ja TAMK:n Insinöörimatematiikan valmentavat opinnot -opintojaksot, jotka on tarkoitettu matematiikan kertaukseen ennen varsinaisten opintojen aloittamista.

1.2 Työn rakenne

Johdanto-luvun jälkeen luvussa 2 tarkastellaan TTY:n ja TAMK:n matematiikan opintojaksojen eroja ja yhtäläisyyksiä. Esille nostetaan sellaisia aiheita, jotka ovat diplomi-insinöörin kannalta tärkeitä ja joita ei käsitellä ammattikorkeakoulussa riittävällä tarkkuudella. Vertailussa ovat olleet mukana TTY:n opintojaksot Insinöörimatematiikka 1, 2, 3 ja lisäksi on tutustuttu opintojaksoon nimeltä Johdatus yliopistomatematiikkaan. TAMK:n puolelta on tutkittu kaikille insinööriopiskelijoille kuuluvia yhteisiä opintojaksoja, jotka ovat Geometria ja vektorilaskenta, Funktiot ja matriisit, Differentiaalilaskenta sekä Integraalilaskenta. Luvussa 3 verrataan ensimmäisen vuoden opiskelijoiden, suoraan maisterivaiheeseen tulleiden opiskelijoiden sekä suoraan maisterivaiheeseen tulleiden AMK-insinöörien Insinöörimatematiikka 1, 2 ja 3 -opintojaksoista saamien arvosanojen keskiarvoja toisiinsa. Testauksessa käytetään yksipuolista t-testiä, jota varten Matlabissa on funktio nimeltä ttest2.

Sisältövertailun ja opintomenestyksen tarkastelun jälkeen luvussa 4 paneudutaan opetuksen teoriaan tutustumalla konstruktivismiin, käänteiseen opetukseen, verkko-opetuksen erityispiirteisiin ja arviointiin. Nämä aiheet on valittu, koska ne ovat olennaisia luvussa 5 esiteltävän Siltakurssin kannalta. Siltakurssi on sisältövertailun perusteella suunniteltu opintojakso suoraan maisterivaiheeseen tuleville AMK-insinööreille. Siihen on koottu diplomi-insinöörin opintoja ja tulevaisuutta ajatellen tärkeitä matematiikan aiheita, joita TTY:sta tekniikan kandidaatiksi valmistunut on opiskellut Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoilla. Viimeisessä luvussa 6 kootaan tehty tutkimus yhteen sekä esitetään johtopäätöksiä ja kehitysehdotuksia.

1.3 Matematiikan opetuksen eurooppalainen viitekehys

The European Society for Engineering Education -järjestö (SEFI) on kansainvälinen kansalaisjärjestö, jonka tavoitteena on toimia insinöörikoulutuksen tarjoajien, opettajien ja opiskelijoiden yhteisönä. Sen tavoitteena on vaikuttaa insinöörikoulutuksen kehittämiseen Euroopassa ja vahvistaa insinöörien asemaa yhteiskunnassa. Järjestö välittää tietoa insinöörikoulutuksesta muun muassa vuosittaisten seminaarien ja konferenssien sekä erilaisten tutkimusten ja kannanottojen avulla. [7]

Vuonna 2013 SEFI:n matematiikan työryhmä julkaisi viitekehyksensä matematiikan opetukseen insinöörikoulutuksessa. Raportin tavoitteena on luoda matematiikan opetukseen korkeamman tason tavoitteet ja suuntaviivat, jotka perustuvat sen hetkisiin korkeatasoisiin kasvatustieteen tutkimuksiin. Matemaattinen kompetenssi on kykyä ymmärtää, arvioida, tehdä ja käyttää matemaattisia konsepteja relevanteissa konteksteissa ja tilanteissa. [6, s.7]

SEFI:n julkaisussa on jaoteltu insinöörikoulutuksen kannalta keskeiset matematiikan sisällöt neljälle eri tasolle. Tasot eivät sisällä täsmälleen niitä asioita, jotka insinöörikoulutuksessa tulee käsitellä, vaan sellaisia aiheita, jotka ovat jatkon kannalta oleellisia. Jokaista lueteltua asiaa ei välttämättä kaikissa Euroopan kouluissa käsitellä, vaan tasot on luotu ohjaamaan opetusta tavoiteltuun suuntaan. [6, s.20]

Alin taso on nimeltään Core Zero ja sen sisältämät tiedot ja taidot kuuluvat Suomessa pääosin lukion oppisisältöihin. Niistä juuri mitään ei voi jättää välistä ilman, että tulevat opinnot kärsisivät siitä. Tämän tason asioita voidaan joutua kertaamaan insinööriopintojen alussa, koska on vaikeaa tietää, millä tasolla uusien opiskelijoiden osaaminen todella on. Kaikkia Core Zero -tason asioita ei välttämättä opeteta kaikissa eurooppalaisissa kouluissa, vaan taso koostuu sellaisista aiheista, jotka yhdessä muodostavat riittävän perustan, jolle voidaan alkaa rakentamaan insinöörikoulutuksen matematiikan osa-alueita yliopistoissa. [6, s.20]

Core Zeron jälkeen tulee taso nimeltä Core Level 1. Siihen kuuluvat sellaiset tiedot ja taidot, jotka ovat oleellisia kaikille insinööreille. Nämä sisällöt tulevat enimmäkseen katettua ensimmäisenä opiskeluvuonna teknillisessä yliopistossa. On kuitenkin huomioitava, että tieto- ja ohjelmistotekniikan aloilla tarvittavat matematiikan taidot eroavat suuresti muista aloista, joten näiden alojen kohdalla tämä taso on vain osittain relevantti. Näillä aloilla saattaa esimerkiksi diskreetin matematiikan käsittely olla syvällisempää kuin konetekniikan alalla. [6, s.20]

Level 2 sisältää selvästi täsmällisempiä tietoja, joista valitaan tutkinto-ohjelmien tarpeiden mukaiset aiheet. Aiheet linkittyvät yksinkertaisiin reaalimaailman ongelmiin. Tällä tasolla ei enää voida olettaa, että kaikki opiskelisivat kaikki sisällöt, vaan tämän tason aiheista opiskellaan vain omalle alalle oleelliset aiheet. [6, s.21]

Viimeinen taso, Level 3, sisältää hyvin täsmällisiä aiheita, joita opiskellaan osana matematiikan syventäviä opintoja. Aiheet linkittyvät yleiseen matematiikan teoriaan ja sen yhdistämiseen haastavampiin reaalimaailman esimerkkeihin. Tämän tason sisällöt voivat esimerkiksi käsitellä jotakin insinöörialakohtaista sovellusta. Niitä opiskellaankin usein osana sovellukseen tutustumista eikä erillisenä matematiikan aiheena. [6, s.21]

Seuraavassa luvussa 2 olevassa vertailussa käytetään apuna edellä esiteltyjä matematiikan osaamisen tasoja.

2. TAMK:N MATEMATIIKAN OPPISISÄLLÖT VERRATTUNA TTY:N SISÄLTÖIHIN

Matematiikan opetuksen metodit, käytännön järjestelyt ja sisällöt vaihtelevat yliopistoittain ja ammattikorkeakouluittain. Esimerkiksi TAMK:ssa ei järjestetä erikseen luentoja ja harjoituksia, vaan teoriaa opetetaan ja tehtäviä tehdään oppitunneilla. TTY:ssa luennoilla voi olla paljonkin osallistujia, mutta Insinöörimatematiikan opintojaksoilla erillisissä laskuharjoituksissa ryhmäkoko pyritään rajoittamaan 25 opiskelijaan.

Otsikkotasolla aiheet ovat lähes samat, mutta käsittelyn syvyys ja laajuus vaihtelevat huomattavasti. Sekä ammattikorkeakouluissa että yliopistoissa on koulutusohjelmakohtaisia eroja matematiikan perusopinnoissa. TTY:ssa kaikilla koulutusohjelmilla paitsi arkkitehdeilla on yhteensä 15 op osaamistavoitteiltaan samoja opintoja (Insinöörimatematiikka 1-3), mutta Luonnontieteiden tiedekunnan opiskelijat opiskelevat hieman teoreettisempaa matematiikkaa (Matematiikka 1-3) [41].

Tampereen ammattikorkeakoulun matematiikan opetus on varsin laajaa ja sisältää paljon asiaa. TAMK:ssa on kaikille tekniikan alan opiskelijoille neljä yhteistä matematiikan opintojaksoa, joista jokaisen laajuus on kolme opintopistettä. Yhteiset opintojaksot ovat Geometria ja vektorilaskenta, Funktiot ja matriisit, Differentiaalilaskenta ja Integraalilaskenta. Näiden yhteisten opintojaksojen lisäksi on opiskelijat suorittavat koulutusohjelmakohtaisia opintojaksoja.

Tietotekniikan (ennen vuotta 2013 aloittaneet), tieto- ja viestintätekniikan, biotuote- ja prosessitekniikan sekä LVI-talotekniikan koulutusohjelmissa opiskelevat suorittavat Tekniikan tilastomatematiikan -opintojakson (3 op). Sähkö- ja automaatiotekniikan ja sähköisen talotekniikan opiskelijoiden pitää suorittaa Integraalimuunnokset-opintojakso (3 op). Tietotekniikan (ennen vuotta 2013 aloittaneet) sekä tieto- ja viestintätekniikan opiskelijat suorittavat aiemmin mainittujen lisäksi Diskreetit järjestelmät -opintojakson (3 op). Tietokoneavusteinen matematiikka

-opintojakso (3 op) on pakollinen sähkövoimatekniikan (Sähkö- ja automaatiotekniikan koulutusohjelman suuntautumisvaihtoehto) opiskelijoille syksystä 2015 lähtien. Myös muut aiheesta kiinnostuneet voivat osallistua opintojaksolle. Lisäksi lähes kaikki opiskelevat opintojakson nimeltä Mittaamisen ja raportoinnin perusteet (3 op). [39]

Mitkään TAMK:n ja TTY:n matematiikan opintojaksot eivät sisällöiltään vastaa täysin toisiaan. Kaikki TAMK:n peruskurssit yhdessä muodostavat kuitenkin kohtuullisen osuuden etenkin Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoista.

Hyvin merkittävä ero matematiikan opiskelussa TTY:ssa ja TAMK:ssa se, että matematiikan opintojaksoilla käytetään TAMK:ssa symbolista CAS-laskinta, jolla voi myös derivoida ja integroida. TTY:ssa ei käytetä laskimia tenteissä ja siksi muun muassa derivointi ja integrointi pitää osata ilman apuvälineitä. Opiskelussa käytetään apuna erilaisia tietokoneohjelmistoja, kuten Matlabia. On vaikea sanoa, kuinka paljon AMK-opiskelijat käyttävät laskinta ja minkä verran laskevat päässä tai paperilla. Tämä on kuitenkin hyvä ottaa huomioon vertailua tehdessä.

Seuraavissa kappaleissa (2.1 - 2.7) tutustutaan siihen, kuinka TTY:n kaikille pakollisten matematiikan opintojaksojen sisällöt tulevat käsitellyiksi TAMK:n tekniikan alan opintojaksoilla ja toisin päin. Esille nostetaan otsikoita ja aihealueita, jotka poikkeavat TTY:n opintojaksojen sisällöistä. TTY:n Luonnontieteiden tiedekunnan Matematiikka-opintojaksojen sisältöihin ei paneuduta, koska ne ovat osaamistavoitteiltaan hieman laajempia kuin Insinöörimatematiikka-opintojaksojen sisällöt. Lisäksi AMK-insinöörit tulevat pääosin niiden koulutusohjelmien maisterivaiheisiin, joissa Insinöörimatematiikka kuuluu opintosisältöihin [41]. Poikkeuksen tästä tekevät Ympäristö- ja energiatekniikan sekä Biotekniikan koulutusohjelmat, joissa opiskellaan Matematiikka 1-4 -opintojaksot. AMK-taustaisten opiskelijoiden kohdalla on kuitenkin toisinaan poikettu tästä käytännöstä. Näihin koulutusohjelmiin tulee AMK-taustaisia maisterivaiheen opiskelijoita vuosittain alle kymmenen. Vertailussa aiheet on koottu matematiikan otsikoiden alle, jotta tarkastelusta olisi hyötyä myös opintojaksojen sisältöjen vaihtuessa. TTY:n osalta vertailussa olleet sisällöt kuuluvat Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoihin ja TAMK:n osalta Geometria ja vektorilaskenta, Funktiot ja matriisit, Differentiaalilaskenta sekä Integraalilaskenta -opintojaksoihin.

Kappaleessa 2.8 tutkitaan TAMK:n muita matematiikan opintojaksoja ja niiden sisältöjä sekä yhtäläisyyksiä TTY:n toisen vuoden matematiikan opintojaksoihin.

Sisältöanalyysi on tehty opinto-oppaiden ja opintojaksoilla käytössä olevien materiaalien perusteella. TAMK:n osalta on käytetty Timo Mäkelän tekemiä monisteita, jotka ovat saatavilla verkossa. TTY:n materiaaleina on käytetty opettajien tekemiä luentomonisteita, joiden pääasiallisina lähdeteoksina ovat olleet oppikirjat Calculus [5] ja Linear Algebra [34]. Monisteiden perusteella ei voida päätellä, kuinka syvällisesti luennoilla tai oppitunneilla tiettyjä aiheita käsitellään. Vastuuopettaja päättää opintojaksolla käytettävästä oppimateriaalista. TTY:ssa opintojaksoilla käytettävät oppikirjat on sovittu yhdessä, mutta vastuuopettajat voivat käyttää eri opintomonisteita.

Vaikka seuraavissa kappaleissa nostetaan esille nimenomaan oppisisältöjen eroja, on muistettava, että ammattikorkeakoulun ja teknillisen yliopiston vaatimukset ja matematiikan osaamisen tarpeet ovat erilaiset ja siitä syystä sisällötkään eivät vastaa täysin toisiaan. TAMK:n matematiikan opintojaksoilla käsitellään kiitettävän paljon ja kattavasti matematiikan sisältöjä siihen nähden, kuinka paljon siellä on mahdollista käyttää aikaa matematiikan opetukseen.

2.1 Joukko-oppi, logiikka ja funktio-oppi

Joukko-oppia ja logiikkaa käsitellään TTY:ssa heti opintojen alussa. TAMK:n kaikille yhteisten opintojaksojen sisältöihin niitä ei kuulu. [39]

Funktio-opin osalta sisällöt vastaavat toisiaan hyvin. Ainoa pieni ero on, että injektion, surjektion tai bijektion käsitteitä ei TAMK:n materiaalissa esiinny. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, ettei niitä voitaisi oppitunneilla käsitellä. TAMK:n tämänhetkisissä (lukuvuosi 2014-2015) opintojaksoissa nämä sisällöt kuuluvat joko Funktiot ja matriisit tai Differentiaalilaskenta -opintojaksoihin. Alkeisfunktioita käsitellään molemmissa oppilaitoksissa varsin samalla tavalla. [13, 19]

Taulukkoon 2.1 on koottu tärkeimpiä yhtäläisyyksiä ja eroja.

2.2 Reaalianalyysi

Tässä kappaleessa käsitellään funktion raja-arvoihin, jatkuvuuteen, derivaattaan ja integraaliin liittyviä aiheita ja niiden käyttöä TAMK:ssa ja TTY:ssa.

Taulukko 2.1 *Joukko-opin, logiikan ja funktio-opin sisältöjä ja niiden kuuluminen oppisisältöihin TAMK:ssa ja TTY:ssa. 'TTY' sarakkeessa lukee, mille SEFI:n tasolle käsiteltävä asia kuuluu, mikäli sisältö löytyy TTY:n opintojaksoilta. Sarakkeessa 'op' kerrotaan, kuinka monta opintopistettä aiheesta arviolta saisi, jos TTY:n opintojakso pilkottaisiin osiin. [13, 19, 25, 26]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Joukko-oppi	-	Core Zero - Core Level 1	1 op
Logiikka	-	Core Level 1	
Funktio-oppi			1 op
- funktion määritelmä ja siihen liittyviä käsitteitä	x	Core Zero	
- injektio, bijektio ja surjektio	-	Core Zero	
- käänteisfunktio ja yhdistetty funktio	x	Core Zero	
- kasvavuus, vähenevyys	x	Core Zero	
Alkeisfunktiot	x	Core Zero - Core Level 1	

Funktion raja-arvon ja jatkuvuuden osalta oppisisällöt vastaavat toisiaan varsin hyvin. Tarkastelun syvällisyys ei ole samanlaista, mutta tärkeimmät aiheet käydään läpi molemmissa korkeakouluissa. Erityisesti epäoleellisten raja-arvojen tapauksessa käsittely on tarkempaa TTY:ssa. Taulukkoon 2.2 on eritelty raja-arvoon ja jatkuvuuteen liittyviä sisältöjä. [13, 19, 26]

Taulukko 2.2 *Funktion raja-arvon ja jatkuvuuden sisältöjä. [13, 19, 26]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Funktion raja-arvo ja jatkuvuus			1 op
- raja-arvo ja sen ominaisuuksia	x	Core Zero	
- jatkuvuus	x	Core Level 1	
- Boltzanon lause	x	Core Level 1	

Derivaatan opiskelun osalta eroja on muutamia. Erotusosamäärä käsitellään molemmissa oppilaitoksissa. Vasemman ja oikeanpuoleiset derivaatat eivät kuulu TAMK:n oppisisältöön tai ainakaan niitä ei esitellä materiaalissa. Myös väliarvolauseiden käsittelyssä on eroavaisuuksia. Ne esitellään molemmissa korkeakouluissa, mutta ainakin TTY:ssa käsittely on jätetty vähemmälle huomiolle viimevuosina. Opintojakson sisältöä on jouduttu karsimaan, koska opiskelijoiden lähtötaso on heikentynyt ja koska ohjelmistojen opetus hoidetaan nykyään luennoilla erillisten tietokoneharjoitusten sijasta. Niinpä aikaa uuden aihesisällön opiskeluun on vähemmän. Lukiossa kurssien valinnanmahdollisuudet ovat lisääntyneet, joten kaikkien opiskelijoiden osaamien asioiden määrä on vähentynyt. Laskinta ja taulukkokirjaa käytetään paljon lukioissa ja niiden käytöstä on luovuttava yliopistoon siirryttäessä. Taulukossa 2.3 on eritelty oppilaitoksien oppisisältöjä aiheittain. [13, 19, 26]

Taulukko 2.3 *Derivaattaan liittyviä sisältöjä. [13, 19, 26]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Derivaatta			1 op
- erotusosamäärä	x	Core Zero	
- vasemman- ja oikeanpuoleinen derivaatta	-	Core Zero	
- perussäännöt ja -lauseet	x	Core Zero	
- l'Hôspitalin sääntö	x	Core Zero	

Nykyisen opetussuunnitelman mukaan integraalilaskentaa käsitellään TTY:ssa Insinöörimatematiikka 3 ja TAMK:ssa Integraalilaskenta -opintojaksoilla. Integraalien osalta sisällöissä on joitakin eroja, jotka eritellään tarkemmin taulukossa 2.4.

Taulukko 2.4 *Integraaliin liittyviä sisältöjä. [15, 20, 26]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Integraali			1,5 op
- määritelmä sekä peruskaavoja ja -sääntöjä	x	Core Zero	
- osittaisintegrointi	-	Core Level 1	
- integrointi sijoituksen avulla	-	Core Level 1	
- osamurtokehitelmä	x	Core Level 1	
Määrätty integraali	x	Core Level 1	
Geometrisia sovelluksia	x	Core Zero - Core Level 1	
Epäoleellinen integraali	x	Core Level 1	
- rajoittamaton integrointiväli	x	Core Level 1	
- rajoittamaton funktio	-	Core Level 1	
- majorantti- ja minoranttiperiaate	-	Core Level 1	

Integraalilaskennan osalta suurimpina eroina voidaan pitää osittaisintegroinnin ja osamurtokehitelmän puuttumista TAMK:n oppisisällöistä. Muita eroja ovat sijoituksen avulla integroinnin sekä epäoleellisen integraaliin liittyen rajoittamattoman funktion sekä majorantti- ja minoranttiperiaatteiden puuttuminen TAMK:n opintojaksoilta. [15, 20, 26]

2.3 Kompleksianalyysi

Kompleksiluvut ovat tärkeitä insinööreille ja siksi niiden opiskelu aloitetaan sekä TAMK:ssa että TTY:ssa heti opintojen alussa ensimmäisillä matematiikan opintojaksoilla. Kompleksilukuja käsitellään TTY:n tämänhetkisten opintojaksojen sisältöjen mukaan Insinöörimatematiikka 1:ssä. TAMK:ssa aihetta käsitellään Geometria ja vektorilaskenta -opintojaksolla. Sisällöissä on pieniä eroja. Taulukkoon 2.5 on eritelty kompleksilukuihin liittyviä aiheita tarkemmin.

Taulukko 2.5 *Kompleksianalyysiin liittyviä sisältöjä. [13, 19, 25]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Kompleksiluvut			1 op
- peruslaskutoimitukset	x	Core Zero	
- esitysmuodot	x	Core Zero	
- De Moivren ja Eulerin kaavat	x	Core Level 1	
- kompleksiluvun juuri	-	Core Level 1	
- kompleksikertoiminen polynomi	-	Core Level 1	

Kompleksianalyysin osalta TAMK:n opintojakso kattaa melko hyvin TTY:n sisällöt. Pieniä eroja kuitenkin on. TAMK:n materiaaleissa ei esimerkiksi esitellä ollenkaan vaihdanta-, osittelu- ja liitäntälakeja. Toki voidaan olettaa opiskelijan osaavan soveltaa niitä reaalianalyysin puolelta tai niistä voidaan puhua oppitunneilla. Myös kompleksiluvun juuri ja kompleksinen polynomi puuttuvat Mäkelän monisteesta Insinöörin perusalgebra [25].

2.4 Vektorit ja lineaariset yhtälöryhmät

Matriisilaskenta on yksi iso kokonaisuus, joka on kokonaan uutta asiaa ammattikorkeakoulu- ja yliopisto-opiskelijoille. Aiheeseen paneudutaan TTY:ssa 5 opintopisteen opintojaksolla Insinöörimatematiikka 2. TAMK:n puolella matriiseja ja vektoreita käsitellään Geometria ja vektorilaskenta -opintojaksolla (3 op) heti opintojen alussa.

Vektorilaskennan osalta suurimpana erona voidaan pitää eroa vektoreiden dimensioissa: TTY:ssa vektorit ovat n-ulotteisia, kun TAMK:ssa paneudutaan pääasiassa 2- ja 3-ulotteisiin vektoreihin. Vektoreita ja matriiseja opiskellaan Mäkelän Insinöörin perusgeometria -monisteen [27] avulla. Mainittakoon kuitenkin, että Mäkelän monisteessa Insinöörin perusmatematiikka 2 [28] esitellään myös n-ulotteisia vektoreita ja niillä operointia, mutta sisältö ei ainakaan tällä hetkellä kuulu matematiikan yhteisille opintojaksoille. Taulukkoon 2.6 on koottu vektoreihin liittyviä sisältöjä tarkemmin ja eritelty, kuuluvatko ne oppilaitoksen oppisisältöihin. [14, 27, 28]

TAMK:ssa vektorit esitetään koordinaattiesityksen ($x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$) avulla ja siksi pysty- ja vaakavektoreista eikä transpoosista puhuta vielä tässä vaiheessa mitään. Näihin kuitenkin palataan matriisien yhteydessä. Koordinaattivektoreiden virittämistä avaruuksista puhutaan vain Insinöörin perusmatematiikka 2 -monisteessa, mutta aihe kuuluu peruskurssien sisältöön. [14, 27, 28]

Ristitulon yhteydessä puhutaan molemmissa oppilaitoksissa kohtisuoruudesta, mutta koska TTY:ssa vektorit ovat n-ulotteisia, käytetään termiä ortogonaalisuus kohtisuoruuden sijasta. [14, 27]

Taulukko 2.6 *Vektorilaskentaan liittyviä sisältöjä. [14, 27]*

Aihe	TAMK	TTY	op
Vektorit			1 op
- peruslaskutoimitukset	x	Core Level 1	
- avaruus ja kanta	-	Core Level 1	
- lineaarikombinaatio	-	Core Level 1	
- piste- ja ristitulo	x	Core Level 1	
- Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö	x	Core Level 1	
- vektoreiden välinen kulma	x	Core Level 1	
- vektoreiden välinen etäisyys	-	Core Level 1	
- metriikan ehdot	-	Core Level 1	
- ortogonaalisuus ja projektio	x	Core Level 1	
- determinantti	x	Core Level 1	
- Lagrangen identiteetti	-	Core Level 1	
- normaalivektori	-	Core Level 1	
- suoran ja tason yhtälöt	-	Core Level 1	

Lineaarisista yhtälöryhmistä puhutaan molempien oppilaitosten matematiikan opintojaksoilla, mutta sisällöt eivät täysin vastaa toisiaan (erittely sisällöistä taulukossa 2.7). TAMK:n opintojaksolla Funktiot ja matriisit käsitellään ainoastaan neliöllistä lineaarista yhtälöryhmää, jolloin ratkaisu on olemassa, jos matriisin determinantti ei ole nolla. Yhtälöryhmä opetellaan ratkaisemaan käänteismatriisin avulla. Monisteessa opetetaan muodostamaan käänteismatriisi adjungoidun matriisin, jonka muodostamiseen tarvitaan determinanttia, avulla. Käänteismatriisin muodostaminen kuitenkin kehotetaan tekemään laskimella tai tietokoneella, kun matriisi on iso. Esimerkeissä käänteismatriisi muodostetaan joko CAS-laskimella tai taulukkolaskentaohjelmalla. TAMK:n käsittelyssä jää kokonaan huomiotta tilanne, jossa lineaarisella yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja. [14, 27]

Taulukko 2.7 *Lineaarisiin yhtälöryhmiin liittyviä sisältöjä. [14, 27]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Lineaariset yhtälöryhmät			1 op
- määritelmä	x	Core Level 1	
- matriisimuoto	x	Core Level 1	
- redusoitu vaakariviporrasmuoto	-	Core Level 1	
- matriisin aste	x	Core Level 1	
- Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä	-	Core Level 1	
- Cramerin sääntö	Core Level 1	-	
- homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä	x	Core Level 1	

Yksittäistä lineaarista yhtälöä ei määritellä erikseen TAMK:n monisteessa, vaan esitetään vain, millaista muotoa on lineaarinen yhtälöryhmä. Tästä opiskelija voi tietysti itse päätellä, minkälainen on lineaarinen yhtälö. TTY:ssa lineaarinen yhtälöryhmä ei välttämättä ole neliöllinen. [14, 27]

Matriisimuoto esitetään sekä Insinöörimatematiikka 2 että Funktiot ja matriisit -opintojaksoilla. Matriisimuodon ratkaisemiseen esitellään TTY:ssa redusoitu vaakariviporrasmuoto, josta yhtälöryhmän ratkaisu voidaan suoraan lukea. Gauss-Jordanin eliminointimenetelmän käyttö opetellaan TTY:n Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksolla. [14]

TAMK:ssa keskitytään yhtälöryhmän ratkaisemiseen käänteismatriisin avulla. Menetelmästä kuitenkin mainitaan, että sitä kannattaa käyttää lähinnä silloin, kun käänteismatriisi on tiedossa. Myös eliminointimenetelmä mainitaan, mutta sen käyttöä ei esitellä. Pienten matriisien (yhtälöparit ja 3x3-matriisit) ratkaisemiseen esitellään Cramerin sääntö, joka perustuu ratkaisun alkioiden laskemiseen yksittäin determinantin avulla. [27]

2.5 Matriisilaskenta

Matriisit esitetään molemmissa oppilaitoksissa $n \times m$-ulotteisina. Funktiot ja matriisit -opintojaksolla (3 op) TAMK:ssa esitellään myös n-ulotteiset pysty- ja vaakavektorit sekä kerrotaan, kuinka avaruusvektorit voidaan esittää summan sijasta kolmisarakkeisena vektorina. Taulukossa 2.8 on eritelty tarkemmin matriiseihin liittyviä aiheita. [14, 27]

Taulukko 2.8 *Matriisilaskentaan liittyviä sisältöjä. [14, 27]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Matriisit			1 op
- erilaisia matriiseja	x	Core Level 1	
- vektoreiden virittämä joukko ja lineaarinen riippumattomuus	-	Core Level 1	
- laskutoimituksia ja -sääntöjä	x	Core Level 1	
- lineaarikuvaus ja kommutaattori	-	Core Level 1	
- käänteismatriisi	x	Core Level 1	
- negatiiviset potenssit	x	Core Level 1	
- matriisiyhtälön ratkaisu	x	Core Level 1	
- käänteismatriisin muodostaminen Gaussin eliminointimenetelmällä	-	Core Level 1	

Erilaisia erikoismatriiseja, kuten yksikkömatriisi sekä ylä- ja alakolmiomatriisit, esitellään varsin monipuolisesti molemmissa oppilaitoksissa. Matriisien samuus jää tarkasti määrittelemättä TAMK:ssa. TTY:ssa käsitellään vektoriyhtälöryhmiä, joita vastaa parhaiten neliöllinen lineaarinen yhtälöryhmä TAMK:ssa. Asia ei ole täysin sama ja voidaankin todeta, että vektoriyhtälöryhmät ovat uusi asia AMK-insinööreille. [14, 27]

Vektoreiden virittämä joukko ei kuulu TAMK:n matematiikan opintojaksojen sisältöön. Lineaarista riippumattomuutta ei määritellä ainakaan Funktiot ja matriisit -opintojaksolla. Lineaarikuvaus määritellään Mäkelän monisteessa, mutta sekään ei kuulu pakollisten opintojaksojen sisältöön [28, s.81]. [14, 27]

Erilaisia matriisien ominaisuuksia käsitellään laajemmin TTY:ssa. TAMK:n oppisisältöihin eivät kuulu matriisien negatiiviset potenssit, elementaarimatriisit, kääntyvien matriisien peruslause eikä käänteismatriisin muodostaminen Gaussin eliminointimenetelmällä. [14, 27]

Taulukko 2.9 *Aliavaruuksiin, kantoihin ja dimensioihin sekä pienimmän neliösumman ratkaisuun liittyviä sisältöjä. [14, 27]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Aliavaruudet ja niiden dimensiolause	-	Core Level 1	1 op
Kanta			
- $\mathbb{R}^3$:n kanta	x	Core Level 1	
- sarake- ja nolla-avaruuden kannan määrääminen	-	Core Level 1	
Ortogonaalisuus	-	Core Level 1	
Matriisin aste	-	Core Level 1	
Kääntyvien matriisien peruslause	-	Core Level 1	
Pienimmän neliösumman ratkaisu	-	Core Level 1	

Aliavaruuksiin, kantoihin ja dimensioihin sekä pienimmän neliösumman ratkaisuun liittyviä aiheita on eritelty taulukossa 2.9. Aliavaruuksista ei puhuta TAMK:n matematiikan opintojaksoilla juurikaan ja siksi myös nolla- ja sarakeavaruuden kannat jäävät määrittelemättä. Ortogonaalisuutta ei määritellä eikä matriisin astetta. TTY:n Matriisilaskentaa insinöörien tarpeisiin monisteessa esitellään kääntyvien matriisien peruslause, jota ei esiinny TAMK:n materiaaleissa. Pienimmän neliösumman ratkaisua käsitellään vain TTY:n oppimateriaalissa. [14, 27]

Determinantit kuuluvat TAMK:n ja TTY:n perusopintoihin ja niihin liittyviä sisältöjä on eritelty taulukossa 2.10. Molemmissa oppilaitoksissa esitellään $n \times n$-determinantti. Laplacen laajennuslause esitellään vain TTY:ssa. TAMK:n opintojaksoilla esitellään kovin vähän determinantin ominaisuuksia TTY:n opintojaksoihin verrattuna.

Taulukko 2.10 *Determinantteihin ja matriisin ominaisarvoihin ja -vektoreihin liittyviä sisältöjä. [14, 27]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Determinantit			1 op
- $n \times n$-determinantti	x	Core Level 1	
- Laplacen laajennuslause	-	Core Level 1	
- ylä- ja alakolmiomatriisin determinantti	x	Core Level 1	
- determinantin ominaisuuksia	-	Core Level 1	
- tulon determinantti	x	Core Level 1	
Matriisin ominaisarvot ja -vektorit	-	Level 2	

Orelman ja Kaarakan monisteen lukua 6 Matriisin ominaisarvot ja -vektorit ei käsitellä TAMK:n matematiikan peruskursseilla, kuten taulukosta 2.10 nähdään. Ominaisarvoyhtälö ja karakteristinen yhtälö mainitaan Mäkelän Insinöörien perusmatematiikka 2 monisteessa, mutta aihe ei kuulu oppisisältöihin [28, s.88]. [14]

2.6 Sarjateoria

Sarjateorian osalta TTY:n ja TAMK:n opintojaksojen välillä on joitakin eroja. Osa sisällöistä käsitellään Timo Mäkelän materiaalissa [26], mutta sivut eivät kuulu opintojaksolla käsiteltäviin kappaleisiin.

Suurimpana erona voidaan pitää sitä, että TAMK:n materiaalissa ei esitellä niin kattavasti erilaisia testejä sarjan suppenemisen tarkasteluun kuin TTY:ssa. Erilaisten sarjojen esittely jää myös vähemmälle kuin TTY:ssa.

Taulukkoon 2.11 on eritelty sisältöjä tarkemmin.

Taulukko 2.11 *Sarjateoriaan liittyviä sisältöjä. [15, 20, 26]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Sarjateoria			1,5 op
- lukujonon määritelmä ja raja-arvo sekä sarjojen perusominaisuuksia	x	Core Zero - Core Level 1	
- geometrinen sarja ja summa	x	Core Level 1	
- suppenevien sarjojen ominaisuuksia	x	Core Level 1	
- positiiviterminen, harmoninen ja vuorotteleva sarja	-	Core Level 1	
- integraali- ja suhdetesti sekä Leibnizin testi	-	Core Level 1	
- vertailuperiaate ja itseinen suppeneminen	-	Core Level 1	
- potenssisarja ja suppenemissäde	-	Core Level 1	
- derivoituva ja integroituva sarja	-	Core Level 1	
- Taylorin sarja ja polynomi	x	Core Level 1	
- sarjakehitelmiä	x	Core Level 1	

2.7 Differentiaaliyhtälöt

Monien sovellusten matemaattisissa malleissa esiintyy differentiaaliyhtälöitä, ja siksi niiden osaaminen on tärkeää insinööreille ja diplomi-insinööreille. Differentiaaliyhtälöitä käsitellään TAMK:n tämänhetkisen opetussuunnitelman mukaisella opintojaksolla nimeltä Integraalilaskenta. TTY:ssa aihetta opiskellaan Insinöörimatematiikka 3 -opintojaksolla, joka on viimeinen kaikille yhteinen opintojakso. Taulukkoon 2.12 on eritelty tarkemmin differentiaaliyhtälöihin liittyviä aihealueita. [15, 20, 28]

Taulukko 2.12 *Differentiaaliyhtälöihin liittyviä sisältöjä. [15, 20, 28]*

Aihe	**TAMK**	**TTY**	**op**
Differentiaaliyhtälöt			2 op
- määritelmä ja alkuarvoprobleema	x	Level 2	
- separoituva ja yleinen lineaarinen differentiaaliyhtälö	x	Level 2	
- 1. ja 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö	-	Level 2	
- Eulerin menetelmä ja Wronskin determinantti	x	Level 2	
- 2. kertaluvun lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö	-	Level 2	
- 2. kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö	x	Level 2	
- karakteristinen ja epähomogeeninen yhtälö	x	Level 2	
- Korkeamman kertaluvun lineaariyhtälö			
· yleinen muoto ja ratkaisu	x	Level 2	
· yksikäsitteinen ratkaisu, lineaarinen riippumattomuus ja Wronskin determinantti	-	Level 2	
· vakiokertoimisen homogeenisen yhtälön karakteristinen yhtälö	-	Level 2	
- normaaliryhmä ja yhtälöiden muokkaaminen normaaliryhmäksi	x	Level 2	
- pienen normaaliryhmän palauttaminen differentiaaliyhtälöksi	-	Level 2	
- mekaniikan ja piirianalyysin differentiaaliyhtälöitä	Level 2	-	

Oppilaitosten välillä on joitakin eroja liittyen differentiaaliyhtälöiden opiskeluun, kuten taulukosta 2.12 nähdään. On muistettava, että TAMK:ssa differentiaalilaskenta on osa Integraalilaskenta -opintojaksoa (3 op), jolla käsitellään myös muita aiheita, kun TTY:ssa Insinöörimatematiikka 3 -opintojaksolla (5 op) käsitellään aiheen lisäksi vain sarjateoriaa ja integraaleja. Tästä voidaan päätellä, että aiheen käsittelyyn on enemmän aikaa TTY:ssa kuin TAMK:ssa. Molemmissa oppilaitoksissa käsitellään perusasiat varsin samaan tapaan, mutta teknillisen yliopiston puolella käsittely on syvällisempää ja laajempaa. TAMK:ssa ei materiaalin [28] mukaan käsitellä lainkaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä ja korkeamman kertaluvun lineaariyhtälöiden osalta käsittely on varsin kevyttä verrattuna TTY:n opintojaksojen materiaaleihin [15, 20].

Matlabin käyttöä harjoitellaan TTY:ssa ensimmäisen vuoden peruskursseilla ja tässä kohtaa esitellään normaaliryhmän ratkaiseminen Matlabilla. TAMK:ssa on oma Tietokoneavusteinen matematiikka -niminen opintojakso, jossa harjoitellaan Matlabin käyttöä. [20]

TAMK:ssa Integraalilaskennan opintojaksolla käsitellään mekaniikan ja piirianalyysin differentiaaliyhtälöitä. Näitä opiskellaan TTY:ssa fysiikan opintojaksoilla. [28]

2.8 TAMK:n koulutusohjelmakohtaiset ja vapaasti valittavat opintojaksot

Tampereen ammattikorkeakoulussa on kaikille tekniikan alan opiskelijoille pakollisten opintojaksojen lisäksi koulutusohjelmakohtaisia pakollisia opintojaksoja sekä vapaasti valittavia opintojaksoja. Seuraavassa esitellään opintojaksojen sisältöä siltä kannalta, mistä olisi hyötyä TTY:ssa, eli perehdytään siihen, löytyykö TTY:n opintojaksoista vastaavia sisältöjä. Tarkoituksena on löytää yhtäläisyyksiä, jotta maisterivaiheeseen TTY:lle tuleva opiskelija saisi mahdollisimman hyvän hyödyn jo opiskelemastaan matematiikasta.

2.8.1 Tekniikan tilastomatematiikka

Tekniikan tilastomatematiikka (3 op) on pakollinen opintojakso tieto- ja viestintätekniikan, biotuote- ja prosessitekniikan sekä LVI-talotekniikan opiskelijoille. Tieto- ja viestintätekniikan koulutusohjelman nimi oli ennen vuotta 2013 tietotekniikka. Opintojakson vastuuhenkilönä toimiva opettaja valitsee ja tuottaa itse opintojaksolla käytettävän materiaalin. Käytössä on muun muassa osia seuraavista kirjoista:

- Holopainen, Pulkkinen: Tilastolliset menetelmät, Welin+Göös
- Karjalainen, Leila: Tilastomatematiikka, Pii-kirjat

- Kume, Hitoshi: Laadun parantamisen tilastolliset menetelmät, Suomen laatuyhdistys

Näiden lisäksi käytetään opettajan omaa sekä internetissä olevaa materiaalia. [39]

Opintojakson sisältöön kuuluvat todennäköisyyden käsite, kombinatoriikan perusteet ja tavallisimmat jakaumat, kuten normaali-, binomi, t- ja Poisson-jakaumat. Sisältöön kuuluvat myös tilastollisen testauksen periaatteet, mittausaineiston käsittely tietokoneella ja sen kuvaaminen graafisesti. Lisäksi käsitellään tärkeimpien tilastollisten tunnuslukujen käyttöä ja merkitystä. Myös regressiotekniikan käyttö mittausten mallintamisessa ja ennustamisessa on osa oppisisältöä. Tämä vertailu on tehty tutkimalla TAMK:ssa käytössä olevia oppikirjoja (yllä). Tarkkoja kurssikuvauksia tai käsiteltäviä sivuja kirjoista ei kuitenkaan ole ollut käytössä. [39]

Tekniikan tilastomatematiikka -opintojakson sisältöjä löytyy TTY:n Todennäköisyyslaskenta ja Tilastomatematiikka -opintojaksoilta. Molemmat TTY:n opintojaksot ovat 4 opintopistettä, kun TAMK:n opintojaksosta saa 3 op. Opintopistemäärien perusteella voi jo päätellä, ettei TAMK:n opintojakson käsittelyn laajuus voi vastata TTY:n opintojaksoja. [39, 41]

Todennäköisyyden käsite, kombinatoriikka ja tavallisimmat jakaumat käsitellään todennäköisyyslaskennan opintojaksolla. Ne muodostavat kuitenkin vain pienen osan opintojakson koko sisällöstä ja siksi TAMK:n Tekniikan tilastomatematiikka -opintojaksolla ei voi korvata TTY:n Todennäköisyyslaskennan opintojaksoa. Pienen osan hyväksi lukeminen ei ole järkevää eikä TTY:n periaatteiden mukaista [40]. [11, 18, 31]

AHOT (aiemmin hankitun osaamisen tunnistaminen ja tunnustaminen) korkeakouluissa -hankkeen tekniikan alan suosituksissa mainitaan, ettei pienien (0,5 - 1 op) osaamisalueiden korvaavuuksia oteta käsittelyyn [1]. TTY:n kanta (hyväksytty konsistorissa 26.1.2015) on vielä tiukempi. Sen mukaan alle kahden opintopisteen kokonaisuuksien osalta ei osakorvaavuuksia hyväksytä. [40]

Nimensä perusteella voisi Tekniikan tilastomatematiikka -opintojakson ajatella korvaavan osan TTY:n Tilastomatematiikka-opintojaksosta, joka on pakollinen opintojakso rakennustekniikan maisterivaiheen opiskelijoille. TAMK:n opintojaksolla tutustutaan yhden muuttujan regressioon, kun TTY:ssa käsitellään usean muuttujan tapausta. Tämä on vain yksi osa koko opintojaksosta ja siksi koko opintojakson korvaavuus ei ole mahdollista. Pienen osan korvaaminen ei noudata TTY:n konsistorin ohjeita [40]. [11, 18, 36]

Vertailun perusteella voidaan sanoa, että korvaavuus tai osan sisällöstä hyväksi lukeminen ei ole perusteltua. Vaikuttaa siltä, että TAMK:ssa käsittelyssä painotetaan käytännöllisyyttä ja tilastollisten menetelmien käyttöä tietokoneella, kun taas TTY:ssa paneudutaan enemmän teoreettiseen tarkasteluun. TAMK:n oppikirjoissa perehdytään Exceliin ja SPSS-ohjelmistoon. TTY:n Tilastomatematiikka-opintojaksolla esimerkeissä käytetään R-ohjelmistoa, mutta opiskelija voi valita itse, millä ohjelmistolla laskee tehtäviä. [18]

2.8.2 Integraalimuunnokset

Sähkö- ja automaatiotekniikan sekä sähköisen talotekniikan opiskelijat suorittavat Integraalimuunnokset-opintojakson (3 op) yleensä toisen opiskeluvuoden syksyllä. [39]

TAMK:n opintojakson osaamistavoitteet ovat seuraavat: ”Opiskelija

- osaa käyttää Laplace-muunnosta ja soveltaa sitä differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun.
- osaa esittää jaksolliset funktiot Fourier-sarjana.
- osaa tulkita funktion spektrin ja Fourier-kerrointen välisen yhteyden.
- ymmärtää siirtofunktion lineaarisen järjestelmän ominaisuuksien kuvaamisessa.
- tuntee Fourier-muunnoksen / FFT:n käyttämisen työkaluohjelmilla.” [39]

Integraalimuunnokset-opintojakson sisältöjä käsitellään kahdella TTY:n matematiikan opintojaksolla: Fourier'n menetelmät (4 op) ja Kompleksimuuttujan funktiot (5 op). Fourier'n menetelmät on toisen vuoden opintojakso ja siellä käsitellään Fourier-sarjojen osuus Integraalimuunnokset-opintojaksosta. Kompleksimuuttujan funktiot on automaatiotekniikan koulutusohjelman maisterivaiheen vaihtoehtoinen opintojakso ja sillä opiskellaan Laplace-muunnoksia. Kaikki Integraalimuunnokset-opintojakson sisällöistä tulee käsitellyksi näillä kahdella opintojaksolla. TTY:n opintojaksojen sisällöt ovat kuitenkin laajempia.

Kompleksimuuttujan funktiot -opintojaksosta Laplace-muunnokset muodostaa noin 15 %:n osuuden. Tällä opintojaksolla korvaavuus tai loppuosan hyväksi lukeminen ei vaikuta järkevältä, koska TTY:n AHOT-ohjeiden mukaan alle kahden opintopisteen osakorvaavuuksia ei käsitellä [40].

Sen sijaan Fourier'n menetelmät -opintojaksosta noin puolet on Fourier-sarjojen käsittelyä. Tällä kurssilla tulisi harkita, voisiko Integraalimuunnokset-opintojakson TAMK:ssa suorittanut opiskelija osallistua vain opintojakson loppuosaan ja tenttiin tai tentin osaan. Harjoituksista Fourier-sarjoja koskevan osuuden voisi lukea hyväksi. Fourier'n menetelmät -opintojakson ensimmäisen puolikkaan korvaaminen tarkoittaisi kahden opintopisteen hyväksi lukua ja olisi TTY:n AHOT-ohjeiden mukaista [40]. On todennäköistä, että opiskelija tarvitsee kertausta ja joutuu opettelemaan joitain asioita uudestaan, mutta Integraalimuunnokset-opintojakson suoritettuaan hänellä tulisi olla edellytykset siihen.

Seuraavaksi eritellään hieman tarkemmin, mitkä asiat tulevat käytyä läpi ja mitkä jäävät pois opintojakson sisällöstä TAMK:ssa. Vertailussa lähteinä on käytetty TAMK:n opettajan Timo Mäkelän Insinöörin perusmatematiikka 2 -monistetta [28] ja Merja Laaksosen Fourier'n menetelmät -monistetta [21].

Fourier'n menetelmät -opintojakson monisteessa on ensimmäisenä johdantokappale, jossa käsitellään jo tuttuja asioita sekä muutamia perustuloksia tulevaa varten. Näistä aiheista TAMK:n opintojaksolla käsitellään parillinen ja pariton funktio, Heavisiden funktio sekä Diracin deltafunktio. Heavisiden funktion kohdalla TAMK:ssa ei käsitellä tasapulssifunktiota. Skaalaus- ja siirto-operaatioihin ei tutustuta TAMK:ssa, mutta ne ovat toisaalta helposti itse pääteltävissä. Johdannossa myös kerrataan joitakin tuloksia raja-arvoista, paloittain jatkuvuudesta ja jatkuvasti derivoituvuudesta. Nämä asiat on käsitelty TAMK:n insinöörien yhteisillä matematiikan opintojaksoilla ja niiden voi olettaa olevan tuttuja. [21, 28]

Laaksosen monisteen toinen kappale käsittelee Fourier-sarjoja. Kaikkia kappaleen asioita ei oteta Integraalimuunnokset-opintojaksolla esille, mutta käsittely on silti huomattavan kattavaa, kun huomioi opintojaksosta annettavien opintopisteiden määrän (3 op). Molemmissa oppilaitoksissa esitetään Fourier-sarjalle kolme esitysmuotoa: trigonometrinen muoto sekä vaihekulma- ja eksponenttimuodot. Näistä jälkimmäisin myös johdetaan. TTY:ssa avuksi määritellään joitakin integraaleja ja Kroneckerin delta [21, s.18]. Näiden sijaan TAMK:n opintojaksolla opetellaan laskemaan integraalit CAS-laskimella, jonka avulla määritetään myös Fourier-sarjan kertoimet. Näistä on esitetty muutama esimerkki myös käsin laskien. [21, 28]

TAMK:n puolella ei paneuduta Fourier-sarjojen lineaarisuuteen eikä siellä käsitellä sarjan suppenemiseen liittyviä tuloksia. Funktion jatkaminen sini- ja kosinisarjojen tapauksessa jää esittelemättä kuten myös sarjan derivointi ja integrointi termeittäin. [21, 28]

2.8.3 Diskreetit järjestelmät

Diskreetit järjestelmät (3 op) on pakollinen opintojakso tieto- ja viestintätekniikan opiskelijoille. Ennen vuotta 2013 aloittaneet opiskelijat opiskelevat tietotekniikan koulutusohjelmassa, johon opintojakso myös kuuluu. Opintojakso käsittelee differenssiyhtälöitä ja niiden ratkaisemista Z-muunnoksen avulla, Fourier-sarjoja, funktion spektrin ja Fourier-kerrointen välistä yhteyttä, siirtofunktiota sekä Fourier-muunnosta. [39]

Yhtäläisyyksiä löytyy TTY:n Fourier'n menetelmät opintojaksosta. Fourier-sarjojen osalta Diskreetit järjestelmät -opintojakson sisältö on vastaava kuin Integraalimuunnokset-opintojakson. Vertailu löytyy edellisestä Integraalimuunnokset-kappaleesta 2.8.2.

Differenssiyhtälöt ovat erikoistapauksia differentiaaliyhtälöistä ja niitä ei erikseen käsitellä millään tässä tarkasteltavalla TTY:n matematiikan opintojaksolla. TTY:n Diskreetti matematiikka -opintojaksolla on käsitelty Z-muunnoksia, mutta se on poistunut opetustarjonnasta 2014-2015-lukuvuoden jälkeen [4].

Diskreettien järjestelmien osuus Mäkelän vielä keskeneräisestä monisteesta [24, s.4-42] käsitellään kyllä TTY:ssa, muttei millään yksittäisellä opintojaksolla.

Diskreetit järjestelmät -opintojakson sisältöön kuuluvaa diskreettiä Fourier-muunnosta käsitellään TTY:n Fourier'n menetelmät -opintojaksolla. Laaksosen opintomonisteen luku kolme käsittelee aihetta [21, s.44-54]. Diskreetti Fourier-muunnos ja sen käänteismuunnos käsitellään molemmissa oppilaitoksissa, mutta TTY:ssa käsittely on ehkä hieman laajempaa. Ero ei kuitenkaan ole merkittävä.

TAMK:n Diskreetit järjestelmät -opintojaksoon kuuluu paljon käytännönläheistä informaatiota, jota ei samaan tapaan esitellä TTY:ssa. Osa näistä käytännön sisällöistä saattaa myös olla jonkin muun kuin Matematiikan laitoksen opintojaksolla.

2.8.4 Tietokoneavusteinen matematiikka

Tietokoneavusteinen matematiikka -opintojaksolla (3 op) käsitellään perusasioita Matlab-ohjelmistosta ja Simulink-ohjelmasta, joka on rakennettu Matlabin yhteyteen. Simulinkin avulla voidaan rakentaa ja simuloida dynaamisia järjestelmiä ja sillä on graafinen käyttöliittymä [37].

Opintojakso järjestetään TAMK:ssa ensimmäistä kertaa syksyllä 2015, joten lopullista opintomateriaalia ei ole ollut vielä saatavilla. Tietokoneavusteinen matematiikka on pakollinen opintojakso sähkö- ja automaatiotekniikassa sähkövoimatekniikkaan suuntautuneille opiskelijoille ja se opiskellaan kolmannen vuoden syksyllä.

TTY:ssa Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksoon kuuluu Matlabin alkeet -osuus, joka suoritetaan itseopiskeluna sähköisessä Moodle-oppimisympäristössä. Siihen kuuluu samoja sisältöjä kuin TAMK:n opintojaksoon. Samankaltaisia sisältöjä on myös Matemaattisen mallinnuksen peruskurssilla (5 op), joka on tarkoitettu matematiikan opintoihin suuntaaville.

2.9 Suurimmat erot TTY:n ja TAMK:n välillä

Matematiikan opetuksen suurimmat erot TTY:n ja TAMK:n välillä liittyvät vektoreihin ja matriiseihin. Myös sarjateorian ja differentiaaliyhtälöiden osalta löytyy merkittäviä eroja. Voidaan sanoa, että tämänhetkisten opintojaksojen sisältöjen perusteella Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson aiheet tulevat melko hyvin katettua TAMK:n matematiikan opintojaksoilla lukuun ottamatta joukko-opin ja logiikan osuuksia. AMK-taustaisten maisterivaiheen opiskelijoiden kohdalla tulisi kiinnittää erityistä huomiota siihen, että matriiseihin liittyvät matematiikan aiheet tulevat tutuiksi heille.

Liitteessä C on esitetty yhteenveto siitä, miten opintopisteet ja sisällöt jakautuvat TTY:n ja TAMK:n opintojaksoilla. Taulukosta C.1 nähdään, missä kohdissa sisällöt vastaavat toisiaan ja saadaanko niistä yhtä paljon opintopisteitä. Yhteenvedoksi edellisestä taulukosta C.1 on taulukkoon C.2 kerätty opintopistemäärien jakautuminen opintojaksoille. Niistä nähdään, että TAMK:n 12 opintopisteen matematiikan sisällöt kattavat melko hyvin TTY:n Johdatus yliopistomatematiikkaan -opintojakson (8 op) ja suurelta osin myös Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson (5 op) aiheet. Taulukon C.3 numeroiden avulla voi selvittää taulukon C.1 lokeroiden tarkat sisällöt.

3. OPINTOMENESTYS INSINÖÖRIMATEMATIIKAN OPINTOJAKSOILLA

Tässä kappaleessa vertaillaan diplomi-insinööriopintonsa aloittaneiden ensimmäisen vuoden opiskelijoiden saamia arvosanoja Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoista suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien saamiin arvosanoihin. Arvosanoja verrattiin sekä opintojaksoittain että koulutusohjelmittain. Käytetty aineisto sisältää vuosien 2010 ja 2014 välillä aloittaneiden opiskelijoiden arvosanat Insinöörimatematiikka 1, 2 ja 3 -opintojaksoista. Mukana ovat myös hylätyn suorituksen (arvosana 0) saaneet opiskelijat.

Taulukkoon 3.1 on koottu jokaisen opiskelijaryhmän arvosanojen keskiarvot opintojaksoittain sekä aineiston koko jokaisessa tapauksessa. Kaikkien ryhmien keskiarvot ovat kahden ja kolmen välillä. Keskiarvoissa ei ole suurta eroa, mikä on hyvä asia. Taulukon perusteella vaikuttaa siltä, että ensimmäisen vuoden opiskelijoiden arvosanat ovat parempia kuin muiden erityisesti Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson osalta. Tätä tulosta tukee myös yksipuolinen t-testi. Tutkimuksessa käytettiin Matlabin ttest2-funktiota [23], joka perustuu Welchin t-testiin [43].

Taulukko 3.1 *Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoista saatujen arvosanojen keskiarvot ka ja aineiston koko n jokaisessa opiskelijaryhmässä.*

Opiskelijaryhmä	**IMA 1**		**IMA 2**		**IMA 3**	
	ka	n	ka	n	ka	n
1. vuoden opiskelijat	2.90	2715	2.99	2672	2.94	2424
Suoraan maisterivaiheeseen tulleet	2.27	207	2.80	196	2.64	152
AMK-insinöörit	2.28	74	2.90	68	2.63	54

Tilastollisessa testauksessa tutkittiin, poikkeavatko ensimmäisen vuoden opiskelijoiden saamat arvosanat suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien arvosanoista. Yksipuoleisella testillä tarkasteltiin, ovatko ensimmäisen vuoden opiskelijoiden saamat arvosanat parempia kuin suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja

AMK-insinöörien arvosanat. Luottamusvälinä käytettiin kaikissa testauksissa 95 %.

Taulukkoihin 3.2 - 3.4 on koottu koulutusohjelmittain tehtyjen testauksien tulokset Insinöörimatematiikka 1, 2 ja 3 -opintojaksojen osalta. Taulukoissa on erikseen testauksen tulos (h), p-arvo (p) ja molempien aineistojen koot (n_i). Listalta on jätetty osa koulutusohjelmista pois, koska niiden otoskoko jäi liian pieneksi (< 10). Testauksen tulos $h = 1$ kertoo, että testattu väite voidaan jättää voimaan käytetyllä luottamusvälillä. P-arvosta nähdään, millä riskitasolla päätökseen h on päädytty.

Taulukko 3.2 *Suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien opintomenestys verrattuna TTY:n kandivaiheen opiskelijoihin Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla. Puuttuvat koulutusohjelmat on jätetty tarkastelun ulkopuolelle liian pienen otoskoon perusteella.*

Koulutusohjelma	**Maisterivaihe**				**AMK-insinöörit**			
	h	p	n_{kandi}	n_{di}	h	p	n_{kandi}	n_{amk}
Automaatiotekniikka	1	0,001	285	42				
Konetekniikka	0	0,148	326	41	1	0,042	326	11
Materiaalitekniikka	1	0,012	202	31	0	0,451	202	11
Rakennustekniikka	1	0,004	406	41	1	0,004	406	41
Sähkötekniikka	1	0,027	354	12				
Ympäristö- ja energiatekniikka	1	0,018	147	16				

Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden ja suoraan maisterivaiheeseen tulleiden opiskelijoiden arvosanoille t-testin avulla tehdyssä vertailussa havaittiin, että konetekniikan koulutusohjelmaa lukuun ottamatta käytetyllä luottamusvälillä ensimmäisen vuoden opiskelijoiden arvosanat ovat keskimäärin parempia. Konetekniikan osalta p-arvo jää jonkin verran suuremmaksi, mutta tulos on samansuuntainen kuin muissakin koulutusohjelmissa. Ensimmäisen vuoden ja suoraan maisterivaiheeseen tulleiden AMK-insinöörien arvosanojen vertailu on hieman hankalaa, koska rakennustekniikkaa lukuun ottamatta otoskoko on pieni ja rakennustekniikan maisterivaiheen ja AMK-insinöörien joukko on sama.

Insinöörimatematiikka 2 ja 3 -opintojaksojen osalta 95 % luottamusvälillä ei pystytä sanomaan, kummalla ryhmällä opintomenestys on parempaa. Insinöörimatematiikka 2 -opintojakson arvosanojen keskiarvojen kohdalla näyttäisi siltä, että automaatio-, rakennus- ja sähkötekniikan sekä ympäristö- ja energiatekniikan koulutusohjelmissa ensimmäisen vuoden opiskelijat olisivat hieman parempia kuin suoraan maisterivaiheeseen tulleet, mutta riskitaso jää liian suureksi. AMK-insinöörien osalta näyttää siltä, että materiaalitekniikan koulutusohjelmassa he ovat parempia kuin ensimmäisen vuoden opiskelijat. Käytetyllä luottamusvälillä toisin päin testatessa h olisi 1.

Taulukko 3.3 *Suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien opintomenestys verrattuna TTY:n kandivaiheen opiskelijoihin Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksolla. Puuttuvat koulutusohjelmat on jätetty tarkastelun ulkopuolelle liian pienen otoskoon perusteella.*

Koulutusohjelma	**Maisterivaihe**				**AMK-insinöörit**			
	h	p	n_{kandi}	n_{di}	h	p	n_{kandi}	n_{amk}
Automaatiotekniikka	0	0,072	288	43				
Konetekniikka	0	0,566	314	38	0	0,868	314	10
Materiaalitekniikka	0	0,632	197	28	0	0,973	197	10
Rakennustekniikka	0	0,196	392	37	0	0,196	392	37
Sähkötekniikka	0	0,099	341	12				
Ympäristö- ja energiatekniikka	0	0,192	149	16				

Taulukko 3.4 *Suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien opintomenestys verrattuna TTY:n kandivaiheen opiskelijoihin Insinöörimatematiikka 3 -opintojaksolla. Puuttuvat koulutusohjelmat on jätetty tarkastelun ulkopuolelle liian pienen otoskoon perusteella.*

Koulutusohjelma	**Maisterivaihe**				**AMK-insinöörit**			
	h	p	n_{kandi}	n_{di}	h	p	n_{kandi}	n_{amk}
Automaatiotekniikka	0	0,212	249	34				
Konetekniikka	0	0,196	282	32	0	0,164	282	10
Materiaalitekniikka	0	0,596	172	16				
Rakennustekniikka	0	0,202	362	32	0	0,202	362	32
Sähkötekniikka	1	0,030	304	10				
Ympäristö- ja energiatekniikka	0	0,359	140	12				

Sähkötekniikan osalta käytetyllä luottamusvälillä voidaan sanoa, että suoraan maisterivaiheeseen tulleiden opiskelijoiden arvosanojen keskiarvot näyttäisivät olevan huonommat Insinöörimatematiikka 3 -opintojakson osalta, mutta aineiston koko on turhan pieni väitteen luotettavaan perusteluun. Samaa opintojaksoa tarkasteltaessa materiaalitekniikan osalta näyttää siltä, että suoraan maisterivaiheeseen tulevien opiskelijoiden opintomenestys on jopa hieman parempaa kuin ensimmäisen vuoden opiskelijoiden ($p = 0,404$). Muiden koulutusohjelmien kohdalla tilastollinen testaus pitää ensimmäisen vuoden opiskelijoita parempina, mutta p-arvo jää huomattavan huonoksi ($p \geq 0,196$). AMK-insinöörien ja ensimmäisen vuoden opiskelijoiden arvosanoja verrattaessa päädyttiin samansuuntaiseen lopputulokseen.

Tilastollisen testauksen perusteella voidaan sanoa, että ensimmäisen vuoden opiskelijat menestyivät paremmin Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla, mutta seuraavilla opintojaksoilla tilastollisesti merkittävää eroa ei ole nähtävissä käytetyssä aineistossa. Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden parempaa menestystä opintojen alussa selittänee se, että heillä on keskimäärin vähemmän aikaa aikaisemmista matematiikan opinnoista kuin suoraan maisterivaiheeseen tulleilla ja AMK-insinööreillä, jolloin opiskelurytmin löytäminen voi olla hankalaa. Maisterivaiheen opiskelijoiden huonompaa menestystä ensimmäisellä matematiikan opintojaksolla voi selittää myös se, että heistä mahdollisesti suurempi osa työskentelee opintojen ohessa ja että opiskelutavat voivat olla hukassa, jos edellisistä opinnoista on jo aikaa. Ero tasoittuu, kun maisterivaiheen opiskelijat pääsevät opintojen alkuun ja saavat kerrattua perustiedot.

Insinöörimatematiikka 2 -opintojakson osalta osaaminen kääntyi materiaalitekniikan koulutusohjelman AMK-insinöörien eduksi. Muidenkaan koulutusohjelmien kohdalla ensimmäisen vuoden opiskelijoiden parempia keskiarvoja ei voida perustella tilastoanalyysin avulla. Tätä voidaan selittää sillä, että opintojaksolla käsitellään matriiseja, jotka ovat ensimmäisen vuoden opiskelijoille uusi asia ja siksi opiskelussa lähdetään perusteista liikkeelle. Tähän on helppo myös muiden opiskelijoiden tulla mukaan. Matriisit ovat myös hyvin konkreettinen asia ja pienillä matriiseilla opitut laskutoimitukset on helppo yleistää $n \times m$ -ulotteisiin matriiseihin.

4. MONIMUOTO-OPETUKSEN TEORIAA

Sisältövertailun (luku 2) perusteella on suunniteltu Siltakurssi-niminen opintojakso, jonka tarkoituksena on nostaa AMK-insinöörien matematiikan osaaminen tekniikan kandidaattien tasolle. Tässä kappaleessa esitellään opintojakson (luku 5) kannalta oleellisia teoreettisia perusteita. Ensin määritellään jatkon kannalta tärkeät oppimiseen liittyvät käsitteet (kappale 4.1). Tämän jälkeen esitellään opetuksessa 1980-luvulta vaikuttanutta konstruktivismin oppisuuntaa (kappale 4.2), jonka mukaan oppiminen on tiedon konstruoimista. Kappaleessa 4.3 käsitellään käänteiseen oppimiseen eli flipped classroom -käsitteeseen liittyviä menetelmiä ja sitä, miten menetelmä sopii opetukseen. Oppiminen ja ohjaus verkossa (kappale 4.4) eroaa hieman perinteisestä mallista, jossa uusi oppiaines käsitellään luennolla ja sen jälkeen asiaa harjoitellaan kotona ja harjoituksissa tehtävien avulla. Kappaleessa pohditaan verkko-opetuksen hyviä ja huonoja puolia. Arviointi-kappaleessa 4.5 käsitellään oppimistulosten arvostelua ja arviointia sekä niihin liittyviä valintoja.

4.1 Oppimisen käsitteitä

Tässä kappaleessa määritellään keskeiset oppimiseen liittyvät käsitteet, joita myöhemmin käytetään. Määritelmien lähteenä on käytetty Sirkka Hirsjärven Kasvatustieteen käsitteistö -kirjaa [10], jonka pohjalta määritelmiä on muokattu tähän kontekstiin sopiviksi.

Kasvatus (education)

> Kasvatus on inhimillistä toimintaa, jonka tavoitteena on luoda edellytyksiä ihmisen monipuoliselle kehitykselle. Se on kasvattajan ja kasvatettavan välistä vuorovaikutusta, jossa olennaista on erilaisten kasvuvirikkeiden tarjonta.

Opetus (teaching)

> Opetus on kasvatustavoitteiden suuntaista tavoitteellista vuorovaikutusta, jonka tarkoituksena on saada aikaan oppimista.

Oppiminen (learning)

> Oppiminen on ihmisen sisäinen prosessi, jossa yksilön valmius tavoitteelliseen toimintaan uudistuu. Oppimisessa yksilön käyttäytyminen muuttuu pysyvästi joko opetuksen seurauksena tai ympäristön ja yksilön vuorovaikutuksesta. Oppiminen eroaa kasvusta siinä, että oppimisessa käyttäytyminen muuttuu kokemuksen perusteella, kun taas kasvussa muutokset johtuvat fysiologiasta.

Matematiikan opiskelu on sellaista yksilön toimintaa, jonka intentiona on tietyn matematiikan sisällön oppiminen [46, s.130].

Kasvattaja voi olla opettaja tai opiskelukaveri. Opettajalla tarkoitetaan jatkossa luennoitsijaa tai assistenttia, joiden tavoitteena on asiantuntijoina auttaa opiskelijoita oppimaan.

4.2 Konstruktivismi

Konstruktivismi tuli matematiikan opetukseen 1980-luvulla, jolloin alettiin nähdä, että oppimisen tärkein tavoite oli muodostaa merkityksiä opiskelijoille. Opettamisessa oli tärkeää saada opiskelijoiden piilevät uskomukset ja esiymmärrys näkyville, jotta juuri niihin voitiin vaikuttaa. Oppiminen nähtiin tiedon konstruoimisena, joka on aktiivinen kognitiivinen prosessi. [22, s.11-23]

Opettaminen on vaikeampaa kuin se, että opettaja itse opettelee uuden matematiikan osa-alueen. Opettamisen tavoitteena on opiskelijan matemaattisen tietouden kehittäminen ja matematiikan käyttäminen siinä elinympäristössä, jossa opiskelija elää. Opetuksen perustana on konstruktivismin mukaan oltava opiskelijan aiemmat kokemukset aiheesta ja niiden pohjalta hahmoteltu opiskelijan mahdollinen käsitysrakennelma. Tämän perusteella opettajan tulee suunnitella ja toteuttaa opetuksensa siten, että opetuksella pystytään muuttamaan opiskelijan käsitysrakennelmaa kohti tavoiteltavaa rakennelmaa. [22, s.11-23]

Konstruktivismissa ihminen on aktiivinen oman tiedon rakentaja, jonka yksilöllisyydellä on suuri merkitys oppimisessa. Tieto ei ole ongelmattomasti siirreltävää dataa, vaan sen sisäistäminen – oppiminen – vaatii aktiivista kognitiivista toimintaa. Tiedosta olennainen osa muodostuu viitteistä ja merkityksistä, jotka jokainen oppija joutuu itse rakentamaan uudelleen itselleen ja omiin jo olemassa oleviin rakenteisiinsa sopiviksi. Oppijan aktiivisuuden korostamiseen liittyy taustaoletus, jonka mukaan oppijalla on kontrolli oppimisesta. Tästä voidaan olla myös eri mieltä, koska oppimista tapahtuu tahtomattakin. [22, s.11-23]

Heikon konstruktivismin mukaan ihminen konstruoi tietonsa aikaisemman tietorakenteensa pohjalta. Radikaalissa konstruktivismissa mennään vielä pidemmälle. Sen mukaan heikon konstruktivismin lisäksi oletetaan, ettei ihminen voi milloinkaan saada ulkopuolisesta ympäristöstä luotettavaa tietoa, koska kaikkia havaintoja rajoittavat ihmisten aikaisemmat subjektiiviset tietorakennelmat. [22, s.11-23]

Matematiikan opetuksessa suurimmaksi haasteeksi nousee opiskelijoiden esiymmärrysten ja merkitysten esille saaminen opetuksen kohteena olevasta aihepiiristä. Mitä läheisempi kulttuuritausta ihmisillä on, sitä helpompi heidän on ymmärtää toisiaan. Opettaja voi ymmärtää opiskelijaa joko verbaalisen tai toiminnallisen kommunikaation kautta. Leinon mielestä verbaalisesti köyhässä ympäristössä kasvaneiden opiskelijoiden verbaalinen viestintä on varsin heikkoa ja siksi opettajan tulisi panostaa opiskelijoiden toiminnan seuraamiseen. Opiskelijoiden työskentelyä seuraamalla opettaja saa arvokasta tietoa opiskelijoiden matematiikan uskomuksista ja käyttötavoista. [22, s.11-23]

4.3 Käänteinen opetus

Jonathan Bergmann ja Aaron Sams ovat kemian opettajia Coloradosta ja heitä pidetään käänteisen opetuksen (flipped classroom) kehittäjinä. Käänteinen opetus kehittyi vastaukseksi opiskelijoiden poissaoloista aiheutuviin ongelmiin. Bergmannilla ja Samsilla oli useita opiskelijoita, jotka syystä tai toisesta joutuivat olemaan poissa oppitunneilta ja opettajat joutuivat paikkaamaan poissaoloista aiheutuvia puutteita yksityistunneilla. Ratkaisuna tähän he alkoivat videoida oppituntejaan vuonna 2007 ja julkaista tallenteita nettisivuillaan. Näin poissaolleet ja kertausta kaipaavat opiskelijat saattoivat tallenteen avulla opiskella asian, eikä yksityistunteja tarvittu enää. Oppituntitallenteet saivat yllättävää suosiota opiskelijoiden keskuudessa. Idea jalostui edelleen, ja lukuvuonna 2007-2008 Bergmann ja Sams nauhoittivat oppitunnit etukäteen ja pistivät opiskelijansa katsomaan tallenteet ennen seuraavaa tapaamista. Oppitunti käytettiin laboratoriotöihin tai tehtävien tekoon. Näin toimiessaan opettajille jäi enemmän aikaa vuorovaikutukseen opiskelijoiden kanssa eikä heidän tarvinnut luennoida luokan edessä. Lukuvuoden kestäneen kokeilunsa vaikutuksia tarkasteltuaan Bergmann ja Sams huomasivat opiskelijoidensa oppimistulosten parantuneen. [2]

Samoihin aikoihin Yhdysvalloissa asuva Sal Khan piti oppitunteja serkulleen verkon välityksellä. Pian hän opiskelijoineen huomasi, että opetus oli laadukkaampaa, jos oppitunnit nauhoitettiin etukäteen. Nauhoitettuihin tunteihin saattoi tarvittaessa palata myöhemmin uudelleen. Khan alkoi julkaista opetusvideoitaan YouTubessa, jotta myös muut kiinnostuneet pääsisivät niihin käsiksi. Videoiden suosio kasvoi ja Khan päätti jättää työnsä tehdäkseen töitä opetusvideoiden parissa. Hän perusti Khan Academyn, joka on kaikille avoin ja ilmainen verkkosivusto, josta löytyy jo lähes 5300 kappaletta erilaisia opetusvideoita [16, 45].

Bergmannin ja Samsin oppitunneille valmistaudutaan katsomalla kotona tunnin aihetta käsittelevä video. Oppitunti alkaa johdattelulla ja videosta esiin nousseiden kysymysten käsittelyllä. Näiden jälkeen voi olla muutama yhteinen esimerkki, joiden jälkeen koko lopputunti käytetään aiheen harjoitteluun joko laboratorioharjoitusten tekemisen tai kokeen merkeissä. Ennen flipped classroom -malliin siirtymistä opiskelijoille on opetettu, kuinka videoita kannattaa katsoa. Häiriötekijät tulee laittaa pois ja keskittyä vain videon katseluun. Videon pysäytys- ja kelausmahdollisuutta voi hyödyntää, jotta saa tehtyä muistiinpanoja tai kelattua tutun asian ohitse. [2, s.13-17]

Yhteisen oppitunnin aika käytetään mahdollisimman tehokkaasti hyödyksi opettajan ja opiskelijoiden vuorovaikutuksen kautta. Opettajan rooli on tiedon välittäjän sijaan enemmän tutor-tyyppinen ohjaaja, joka huolehtii, että opiskelijat pääsevät vaikeiden kohtien ylitse, ja patistaa tarvittaessa eteenpäin. Ketään ei voi pakottaa oppimaan ja siksi opiskelijat ovatkin viimekädessä itse vastuussa oppimisestaan.

Flipped classroom -menetelmän hyviä puolia on useita. Seuraavassa esitellään niistä yliopisto-opiskelun kannalta merkittävimmät [2, s.19-33]:

Käänteinen oppiminen

- puhuu nykyopiskelijoiden kieltä.

  Opiskelijat käyttävät nykyään paljon erilaisia teknisiä laitteita, jotka ovat usein parempia kuin oppilaitoksen laitteet. Olisi takaperoista kieltää opiskelijoita käyttämästä nykyaikaisia laitteita. Oppilaitosten tulisi soluttautua mukaan digikulttuuriin. Opiskelijoille ei ole mikään ongelma ottaa ohjeita vastaan videolta.

- auttaa kiireisiä opiskelijoita.

  Jos opiskelija joutuu olemaan pois oppitunnilta, hän ei menetä uutta asiaa vaan voi katsoa tallenteen verkosta. Videoita voi hyödyntää myös kokeeseen kerratessa.

- auttaa vaikeuksissa olevia opiskelijoita.

  Tavallisella opettajajohtoisella oppitunnilla usein vain nokkelimmat opiskelijat kyselevät, jolloin muut vain kuuntelevat passiivisina. Miksi yhteistä aikaa pitäisi tuhlata tällaiseen? Flipped classroom -menetelmässä opettaja voi auttaa vaikeuksissa olevia enemmän kuin normaalisti. Myös lahjakkaat opiskelijat tulee huomioida, mutta enää he eivät saa enemmän huomiota kuin muut.

- antaa erilaisille opiskelijoille mahdollisuuden loistaa.

  Nopeasti asian omaksuvat opiskelijat voivat katsoa videon nopeammin ja enemmän opetusta tarvitsevat voivat katsoa sen useampaan kertaan.

- mahdollistaa opetuksen pysäyttämisen ja kelaamisen.

  Videon pysäyttäminen ja kelaaminen on helpompaa kuin oppitunnin keskeyttäminen, eikä muiden tarvitse odotella. Pysäyttäminen mahdollistaa myös videon katsomisen useammassa osassa.

- lisää opettajan ja opiskelijan välistä vuorovaikutusta ja mahdollistaa heidän paremman tutustumisen toisiinsa.

Flipped classroom -menetelmä ei ole vain verkkokurssin mainos, Bergmann ja Sams muistuttavat, vaan sitä käytetään ihan normaaleilla läsnäoloa vaadittavilla oppitunneilla. Teknologian avulla saadaan yhteisestä ajasta ja opiskelusta tehokkaampaa. Opettajalla on iso rooli opiskelijoiden elämässä ja siksi kaikki vuorovaikutus on tärkeää. Opettaja on opiskelijalle roolimalli, eikä sitä tule vähätellä.

- lisää opiskelijoiden välistä vuorovaikutusta.

  Opettajan rooli asian esittelijästä oppimisen ohjaajaksi antaa enemmän tilaa opiskelijoiden keskinäiselle vuorovaikutukselle. Oppitunneilla voi helposti ohjata saman asian kanssa painivat opiskelijat saman pöydän ääreen pohtimaan asiaa. Opiskelijat muodostavat myös spontaanisti erilaisia yhteistyöryhmiä. Opiskelijat pitää saada ymmärtämään, että heidän tavoitteensa on oppiminen eikä tehtävien tekeminen ja että opettaja on heidän kanssaan samalla puolella. Silloin he alkavat tehdä parhaansa.

- mahdollistaa entistä paremman eriyttämisen.

  Nykyään samaan ryhmään mahtuu hyvin eritasoisia opiskelijoita. Flipped classroom mahdollistaa eriyttämisen oppitunneilla. Opettaja voi heikommalle opiskelijalle valita perustehtäviä ja jättää häneltä pois kaikkein soveltavimmat tehtävät. Toisaalta lahjakas tai nopea opiskelija voi saada enemmän vaikeita tehtäviä tai vaikka siirtyä jo opiskelemaan seuraavaa aihetta.

- parantaa luokan hallintaa.

  Jokaiseen ryhmään mahtuu häiriköitä, jotka joko tylsistyvät oppitunneilla tai haluavat vain saada huomiota. Flipped classroom- mallin myötä oppitunneilla on vähemmän opettajajohtoista opetusta, jolloin häiriköiden mahdollisuudet rikkoa rauhaa vähenevät. Bergmann ja Sams ovat huomanneet, että joko häiriköt eivät ole enää tylsistyneitä tai eivät vain enää saa samalla tavalla häirittyä opetusta, koska häiriökäytös on vähentynyt. He kuitenkin muistuttavat, että aina on opiskelijoita, jotka tarvitsevat enemmän ohjausta eteenpäin tai tapaavat alisuoriutua tehtävissä. Näihin opiskelijoihin opettajan tulee kiinnittää erityistä huomiota.

- tekee oppitunneista läpinäkyviä muille kuin opiskelijoille.

  Opettajan tekemät tai valitsemat videot ovat vapaasti internetissä saatavilla, jolloin kuka tahansa voi katsoa, mitä oppitunneilla käsitellään. Innokkaat opiskelijat voivat myös tutustua materiaaliin jo aiemmin kuin on tarkoitus.

- on hyvä mahdollisuus, jos opettaja joutuu olemaan pois.

  Jos opettaja joutuu olemaan pois oppitunnilta, hän voi videoita luentonsa etukäteen ja opiskelijat voivat katso tallenteen oppitunnilla.

- voi johtaa käänteisen oppimisen jatkomenetelmään.

  Bergmann ja Sams varoittavat, että flipped classroom -menetelmän käyttäminen voi johtaa menetelmän jatkokehittelyyn. He kertovat, että nykyään heidän oppitunneillaan opiskelijat saavat edetä omaan tahtiinsa katsomalla videoita ja tekemällä tehtäviä. Opettaja kiertelee luokassa samalla tavoin kuin ennenkin neuvomassa eteenpäin.

Käänteisen opettamisen haittapuolena voidaan pitää opettajan työmäärän lisääntymistä ainakin aluksi, kun videot pitää tehdä. Opiskelijat, joilla on tapana alisuoriutua, saattavat laiskistua vielä enemmän, kun vapaus lisääntyy. Jos opiskelijat saavat edetä omaan tahtiinsa, miten ratkaistaan tilanne, jossa opiskelija on suorittanut jo kaikki tehtävät, mutta periodia on vielä jäljellä? Tämä ei ehkä ole ongelma yliopistossa, mutta peruskoulussa ja lukiossa asian suhteen voi ilmetä hankaluuksia. Opiskelijan ruutuajan kasvaminen huolestuttaa toisia menetelmän vastustajia. Kannattajat perustelevat, että opiskelija viettäisi ajan joka tapauksessa näytön ääressä, joten ajan käyttäminen hyödylliseen tekemiseen on vain positiivista muutosta.

4.4 Oppiminen ja ohjaus verkossa

Verkkokurssi

> Verkkokurssi on internetissä tai intranetissä oleva oppimisympäristö, jossa suurin osa opetuksesta ja vuorovaikutuksesta tapahtuu. [29, s.21].

Nevgi ja Heikkilä toteavat artikkelissaan, että yliopisto-opetus on kohdannut uusia haasteita viimeisten vuosikymmenten aikana, koska oppimisen ja opetuksen tutkimus ja pedagogiikka ovat kehittyneet, tieto- ja viestintätekniikka ovat menneet eteenpäin ja koska opiskelijamäärät ja opiskelijoiden heterogeenisuus ovat lisääntyneet [29, s.19]. He muistuttavat myös, että opetusteknologia ja tietotekniikka tarjoavat välineitä opetuksen tehostamiseksi ja opiskelun joustavuuden lisäämiseksi. Näitä välineitä ei kuulu ehdoitta käyttää, jollei niiden käyttöä pystytä pedagogisesti perustelemaan.

Ensimmäiset verkko-opetuskokeilut olivat etäopiskelua, joka oli ajasta ja paikasta riippumatonta, koska uskottiin, että siten poistetaan esteitä ja helpotetaan opiskelua. Kokemukset olivat kuitenkin päinvastaisia. Huomattiin, että aikatauluttamisella ja yhteisillä verkko-opiskelutilanteilla, joissa opettaja ja opiskelijat olivat samalla hetkellä vuorovaikutuksessa keskenään tietoverkon välityksellä, oli enemmän positiivisia vaikutuksia kuin kokonaan itsenäisellä suorittamisella. [29, s.19-20]

Vuorovaikutus verkossa on erilaista kuin kasvokkain. Kohtaamisiin verkossa pitää järjestää mahdollisuuksia esimerkiksi erilaisin ryhmäkeskusteluin. Pelkkä tekstipohjainen vuorovaikutus sisältää vain vähän sosiaalisia vihjeitä (ikä, sukupuoli, yhteiskunnallinen asema yms.) siitä, kuinka viesti tulisi tulkita [29, s.22]. Verkko-oppimisympäristö voi myös olla osa monimuoto-opetusta, jolloin kaikkea vuorovaikutusta ei tarvitse yrittääkään sisällyttää verkkoon. Tällöin verkossa tapahtuva vuorovaikutus voidaan toteuttaa erilaisin viestein ja keskustelut käydä kasvokkain. Joitakin opetustuokioita voidaan videoida ja liittää osaksi verkko-oppimisympäristöä, jolloin opiskelijat voivat palata niihin myöhemmin.

Yliopistossa tapahtuvan hyvän ja laadukkaan verkko-opetuksen, kuten muunkin opetuksen, tulee perustua tutkimukseen. Jotta verkko-opetus olisi laadukasta, pitää huomioida akateemisen opiskelun erityispiirteet sekä se, että opiskelijoiden ja opettajien odotukset verkko-opetusta kohtaan saattavat olla ristiriidassa keskenään. Laatukriteerit pitää määrittää verkko-opetuksen asiakkaiden – opiskelijoiden – näkökulmasta. Laadukas oppiminen vaatii toimivan verkkotekniikan lisäksi myös järkeviä ja tilanteeseen sopivia pedagogisia ratkaisuja, kerrotaan Nevgin ja Heikkilän artikkelissa. Laadun arvioinnissa on huomioitava oppimisprosessi ja oppimistulokset. [9, s.33],[29, s.22]

Yhdysvaltalainen säätiö A Consortium of Institutions and Organizations Committed to Quality Online Education (Sloan-C) on kehittänyt verkko-opetukseen soveltuvan laatukriteeristön, jonka mukaan laadulle keskeisiä alueita ovat:

- oppimisen tehokkuus,
- kustannustehokkuus,
- saavutettavuus,
- opetus- ja tutkimushenkilöstön tyytyväisyys ja
- opiskelijoiden tyytyväisyys.

Oppimisen tehokkuus sisältää ne menetelmät, joilla varmistetaan, että verkko-opetus tuottaa yhtä hyviä tai parempia oppimistuloksia kuin tavallinen opetus. Kustannustehokkuudella tarkoitetaan, että verkko-opetusta tuottava organisaatio pyrkii jatkuvasti tuottamaan parempia ja laadukkaampia verkko-oppimisympäristöjä ja samalla minimoimaan niistä aiheutuvat kustannukset. Verkko-opetuksen saavutettavuus viittaa siihen, että laitoksen ja tiedekunnan hallinnolliset ratkaisut tukevat monimuoto- ja verkko-opetusta vaihtoehtona perinteiselle lähiopetukselle. Esimerkiksi oppimisalustojen tulisi olla yhteensopivia erilaisten rekisteröintijärjestelmien kanssa. Opetus- ja tutkimushenkilöstön tyytyväisyydellä tarkoitetaan muun muassa laitosten ja tiedekuntien opettajien uusia mahdollisuuksia verkottua kansallisesti ja kansainvälisesti tietotekniikan avulla sekä heidän työtaakkaansa kevenemistä tekniikan hyödyntämisen ansiosta. Henkilöstölle tulee tarjota ohjeita verkko-opetukseen ja mahdollisuuksia kouluttautua asian tiimoilta. Opiskelijoiden tyytyväisyys ilmenee heidän kokemissaan onnistumisissa ja mielekkyydessä opiskelumenetelmää kohtaan. Tämä edellyttää riittäviä verkkotukipalveluja ja opiskelun suunnittelua opiskelijalähtöisesti. [9, s.34-35]

Verkko-opetuksen vaatimaa työmäärää on vaikea ennakoida ja se vaihtelee paljon. Verkossa tapahtuvalta opiskelulta edellytetään yksilöllisyyttä ja joustavuutta, jotka johtavat helposti opettajan työmäärän kasvuun ja muodostuvat näin verkko-opetuksen negatiivisiksi ominaisuuksiksi. Lisääntynyt työmäärä nostaa opetuksen hintaa, jolloin tulostenkin pitäisi olla perinteistä opetusta parempia.[9, s.33,40]

Nokelainen ja Sointu käsittelevät artikkelissaan Oppimista ja opiskelua ohjaavat materiaalit sitä, millainen on hyvä verkko-opiskelumateriaali ja miten materiaali vaikuttaa opiskelijan motivaatioon [30]. Hyvä ja laadukas materiaali huomioi kohderyhmän ja on kirjoitustyyliltään ja vaikeusasteeltaan sopivaa opiskelijalle. Materiaalin tulisi olla ajantasaista ja käyttäjäystävällistä sekä ulkoasultaan että käytettävyydeltään. Verkko-opiskelussa on helppo hyödyntää internetin mahdollisuuksia linkittää oppiainesta ajankohtaisiin aiheisiin. Oppimateriaalin tulostettavuutta pidetään myös hyvänä mahdollisuutena.

4.5 Arviointi

Arvioinnilla tarkoitetaan toimintaa, jonka tarkoituksena on määrittää, kuinka hyvä (laadukas, ansiokas, arvokas, sopiva jne.) jokin asia, esine, suoritus, toiminta tai vastaava on. Laadun määrittelyyn tarvitaan perusteita (kriteereitä). Toisin sanoen arvioijalla on oltava käsitys hyvän laadun ominaisuuksista (piirteistä) eli siitä, miten laatu ilmenee. [38]

Arvostelu ja arviointi ovat eri asioita. Arvostelu muodostaa vain pienen osan arvioinnista. Siinä opiskelijan tulosta verrataan muiden saavutuksiin ja tulos ilmaistaan yleensä numerolla. [42, s.191]

4.5.1 Arvioinnin periaatteita

Opetuksen arviointi on järkevää vain silloin, kun se täyttää seuraavat kriteerit [42, s.194]:

- Arvioinnin perusteena olevat arvot ja tavoitteet ilmaistaan selvästi.
- Kaikki osapuolet ymmärtävät ja hyväksyvät arvioinnin perusteet ja pitävät niitä oikeina ja tasapuolisina.
- Arviointi toteutetaan myös käytännössä siten kuin on sovittu. Kaikki osapuolet ymmärtävät, mitä ideologiaa ja tavoitteita arviointi palvelee.
- Arviointimenetelmiä tarkistetaan ja uudistetaan määräajoin.

Opetuksen tuloksia on mielekästä arvioida vain suhteessa opetuksen tavoitteisiin. Esimerkiksi paljon muistamista vaativan asian arviointi asioiden ymmärtämisen kannalta ei ole kannattavaa. Kaikkien arviointien tulisi täyttää validiteetin ja reliabiliteetin vaatimukset. Myös arvioinnin erottelukykyyn on syytä kiinnittää huomiota. [42, s.197]

Validiteetti tarkoittaa, että arvioidaan juuri sitä ominaisuutta tai kykyä, mitä on tarkoituskin arvioida. Esimerkiksi huolellisuutta arvioitaessa ei matematiikan osaaminen saa vaikuttaa arviointiin. Tenttejä laadittaessa tulee kiinnittää huomiota siihen, että tehtävissä testataan vain kyseisen opintojakson asioita. Reliabiliteetti kuvaa käytetyn menetelmän kykyä antaa satunnaisvirheettömiä tuloksia. Satunnaisvirheitä voi aiheutua esimerkiksi siitä, ettei yksilö pääse testitilanteessa omalle tasolleen jännittämisen vuoksi, tai siitä, että testi on viimeisellä oppitunnilla tunkkaisessa luokkatilassa. Arvioinnin erottelukyvyllä viitataan siihen, kuinka hyvin opiskelijat pystytään erottelemaan tavoitteiden saavuttamisen suhteen. [42, s.203-204]

Arvioinnin tärkeä tavoite on objektiivisuus, joka toteutuu yleensä silloin, kun kaksi toisistaan riippumatonta arvioijaa päätyvät samaan lopputulokseen. Esimerkiksi ylioppilaskokeissa objektiivisuus on huomioitu siten, että oman opettajan lisäksi kokelaan koepaperin tarkistaa myös ylioppilastutkintolautakunnan jäsen. Yliopistossa objektiivisuus toteutuu varsin hyvin isoilla opintojaksoilla, koska tentin tarkistajilla ei ole mahdollisuutta muistaa opiskelijoiden nimiä saatikka opiskelijanumeroita. [42, s.204]

Opiskelu ja arviointi on syytä liittää toisiinsa ja todellisen elämän tarpeisiin, ettei opiskelijalle tule tunnetta, että arvosanat ovat ennalta määrättyjä, tai että niihin ei pysty vaikuttamaan. Monipuolinen ja luotettava arviointi lisää opiskelijan itsetuntemusta sekä auttaa häntä kasvamaan eheäksi ja kypsäksi kokonaispersoonallisuudeksi, jolla on realistinen ja myönteinen kuva itsestään, sanoo Uusikylä kirjassaan. Nykyään on tärkeää omaksua itsenäinen kyky hankkia tietoa ja arvioida sen luotettavuutta sekä osata eritellä sitä järkevästi. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että asiatiedon opiskelu olisi turhaa tai ajastaan jäänyttä. On tärkeää osata perusteita, jotta voi itsenäisesti etsiä lisää tietoa ja syventää osaamistaan. [42, s.198,208]

Opettaja kasvatuksen ammattilaisena ymmärtää, että opetuksen laadun tärkein kriteeri on opiskelijoiden monipuolinen inhimillinen kasvu [42, s.192]. Tämä pitää paikkansa myös yliopistossa. Opettajan tärkein tehtävä on opetuksellaan valmistaa tulevia diplomi-insinöörejä omien alojensa asiantuntijoiksi.

4.5.2 SOLO-mallin sovellus vastauksien arvioinnissa

Biggs ja Collis ovat kehittäneet mallin nimeltä SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) [3], jota Raija Yrjönsuuri on pyrkinyt kehittämään edelleen [46].

SOLO-mallin perustana ovat olleet Piagetin kehitysvaiheet (sensomotorinen kausi, esioperationaalinen kausi, konkreettisten operaatioiden kausi ja formaalisten operaatioiden kausi) [3]. Yrjönsuuren malli on tarkoitettu matematiikan tehtävien vastauksien analysoimiseen ja se on esitetty taulukossa 4.1. Malli sisältää yhdenlaisen arvojärjestyksen, jossa suoritusten paremmuutta arvioidaan lähinnä tehtävän ratkaisemisessa käytetyn oletetun ajattelun perusteella. [46, s.142-142]

Taulukko 4.1 *Laadulliset tasot arvioitaessa matematiikan suorituksia. Mukailtu lähteestä [46, s.143].*

Tiedon taso (ajattelun taso)	**Kuvaus toiminnasta ja ajattelusta**
Rakenteeton tieto *Näkemys on sattumanvarainen.*	Toiminta on epäjohdonmukaista. Ominaista on tehtävän välttäminen asiaan kuulumattomalla toiminnalla.
Yksirakenteinen tieto *Käsitys muodostuu jostakin tiedosta.*	Päätelmä on tehty yhden näkökulman pohjalta. Johdonmukaisuuteen ei ole tarvetta.
Monirakenteinen tieto *Käsitys muodostuu monista osista.*	Tieto koostuu irrallisista, mutta asiaankuuluvista osista. Epäjohdonmukainen toiminta on mahdollista. Yleistäminen on mahdollista vain tietyissä tilanteissa, samoin induktiivinen päättely.
Konkreettinen yleistysten tietämisen taso *Käsitys, jossa ilmiön osia on jo suhteutettu, reflektiivinen yleistys ja konkreettisen yleistysten taso.*	Yleistäminen on mahdollista vain opetetussa ja koetussa ympäristössä. Konkreettisten yleistysten taso. Opitussa järjestelmässä ei ole ristiriitoja, mutta systeemin ulkopuolella voidaan kokea ongelmia, kuten: - muodollinen yleistys-, fysikaalinen kokemus ja yleistys, - loogis-matemaattinen kokemus, joka nousee tietämisestä.
Abstraktin ajattelun käyttämisen taso *Laaja-alainen käsitys ilmiöstä, abstraktin ajattelun taso.*	Ominaista on yleistäminen hypoteettisiin tilanteisiin eli sellaisiin, joita ei ole opetettu tai koettu. Voidaan päätyä useisiin perusteltuihin vaihtoehtoihin.

Yrjönsuuren mukaan opettaja tarkastelee opiskelua ja tehtävien tekemistä lähinnä siitä näkökulmasta, millaisia rakenteita ja ajattelun sisäisiä malleja opettaja haluaa opiskelijoidensa oppivan. Hänen kehittämänsä vastaustiedon luokittelua koskeva malli lähestyy tehtävän arviointia eri kulmasta kuin mihin matematiikassa on perinteisesti totuttu. Yleensä matematiikan tehtävät arvioidaan siten, että kun opiskelijan ratkaisussa esiintyy tietynlainen virhe, siitä seuraa ennalta määrätty pistevähennys, kertoo Yrjönsuuri. Hänen kehittämässään SOLO-mallin sovelluksessa lähestytään arviointia kuten reaaliaineissa: Jos jokin rakenteeseen tai menetelmään liittyvä asia on oikein, siitä saa pisteitä, ei kuitenkaan enempää kuin täydellisestä suorituksesta. [46, s.142]

Alin luokka on nimeltään rakenteeton tieto. Tähän luokkaan kuuluvat tiedon puuttuminen ja arvaus. Opiskelijalla ei ole ymmärrystä tehtävästä, eikä hän siksi osaa erottaa aiheeseen kuulumatonta sisältöä tehtävään sopivasta. Suoritus on nollan arvoinen. [46, s.143]

Yksirakenteinen tieto on toinen vastaustiedon luokka. Tähän ryhmään kuuluvassa vastauksessa ei ole täysin ymmärretty kysyttävää ongelmaa, mutta vastaukseen sisältyy jokin aiheeseen liittyvä osatieto. Kyseiseen sisältöön on kehittynyt vain osittainen sisäinen malli ja siksi opiskelija ei osaa soveltaa oppimaansa kysyttävään ongelmaan sopivaksi. [46, s.144]

Kolmas vastaustiedon luokka on monirakenteinen tieto. Opiskelijan vastauksessa on lähes oikea tulos, vaikka siihen sisältyy myös epäjohdonmukaisia osia. Vastauksesta saadaan yleensä esiin opiskelijan algoritmisen ajattelun käyttäminen, muttei välttämättä reflektiivistä ajattelua. [46, s.144]

Konkreettisen yleistyksen taso sisältää vastaukset, jotka ovat ristiriidattomia, selkeitä ja pyrkivät suljetun ongelman ratkaisuun kokonaisuutena. Opiskelija on osannut esittää ja muotoilla ongelmatilanteen ratkaisun kokonaisuutena. Vastauksessa on käytetty algoritmista ja reflektoivaa ajattelua mielekkäästi. [46, s.144]

Ylin vastaustiedon luokka on nimeltään abstraktin ajattelun käyttämisen taso, jonka sisältämät vastaukset ovat loogis-matemaattisia. Opiskelija on osannut esittää ja muotoilla avoimeen ongelmaan vaihtoehtoisia vastauksia, jotka ovat perusteltuja kokonaisuuksia. [46, s.144]

Laadullisten tasojen kuvauksista edellä voidaan nähdä, että on helppoa laatia tehtävä, jonka avulla voidaan vastaukset jaotella ensimmäisten kolmen tason (rakenteeton, yksirakenteinen ja monirakenteinen tieto) mukaan. Viimeisten kahden tason (konkreettisten yleistysten tietämisen ja abstraktin ajattelun käyttämisen taso) osalta onkin jo vaikeampaa, koska tehtävän täytyy olla on laaja-alainen, avoin ongelma, itsenäisesti luotu todistus tai projektityö. Lukuun ottamatta pieniä todistustehtäviä näitä ei ole juuri totuttu käyttämään tenteissä niiden työmäärän suuruuden takia. [46, s.144]

5. SILTAKURSSI

Sisältövertailussa esille tulleiden oppisisältöjen erojen ja täydentävien opintojen heikon etenemisen takia [35] on suunniteltu Siltakurssi-niminen opintojakso TTY:lle maisterivaiheeseen tuleville AMK-insinööreille, jotka tarvitsevat vielä kertausta ja uusia taitoja pärjätäkseen yliopistomatematiikassa. Opintojakson sisällöt on valittu TTY:n ja TAMK:n opintojaksojen sisältövertailujen perusteella (kts. luku 2). Opintojakso tukee AMK-insinöörin opiskelumotivaatiota ja nopeuttaa hänen valmistumistaan, koska hänen ei väistämättä tarvitse suorittaa Insinöörimatematiikka 1, 2 ja 3 -opintojaksoja, vaan hän voi päivittää osaamisensa riittävälle tasolle käymällä hänelle suunnitellun Siltakurssin. Tässä kappaleessa esitellään kyseisen opintojakson osaamistavoitteet ja moduulien rakenne sekä perustellaan, miksi kyseisiin ratkaisuihin on päädytty.

5.1 Lähtötasotesti

Opintojakso alkaa lähtötasotestillä, joka testaa Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksojen keskeisimpiä sisältöjä. Sen perusteella opiskelijat jaetaan kolmeen ryhmään:

- **A** Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksojen suora hyväksiluku
- **B** Siltakurssi
- **C** Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksot

Ryhmään A kuuluvat ne opiskelijat, jotka lähtötasotestissä osaavat riittävän hyvin Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksojen sisällöt. Opiskelija saa hyväksi luettua Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksot lähtötasotestin hyvän menestyksen perusteella, joten hänelle jää perusopintoihin opiskeltavaksi vain kolme koulutusohjelmasta riippuvaa opintojaksoa.

Ryhmä B on kohtuullisille menestyjille, joilla perusasiat ovat kunnossa, mutta jotka tarvitsevat vielä oppia vaikeammissa asioissa. Tähän ryhmään kuuluu oletettavasti suurin osa AMK:sta TTY:lle tulevista maisterivaiheen opiskelijoista. Heitä varten järjestetään syksyllä Siltakurssi, jonka sisällöt on räätälöity heidän aiempia opintojaan silmällä pitäen. Opintojakso sisältää sellaisia asioita, jotka ovat tärkeitä diplomi-insinööreille ja joita ei ole opiskeltu riittävästi AMK:ssa. Siltakurssi on mahdollista suorittaa myös syyslukukautta nopeammassa aikataulussa. Tällöin opiskelija harjoittelee asiat Moodlessa olevan materiaalin avulla ja osallistuu sähköisiin tentteihin. Kun ne on suoritettu hyväksytysti, opiskelija saa opintojaksosta suoritusmerkinnän. Tämän jälkeen hänen perusopintoihinsa kuuluu vielä kolme neljän opintopisteen matematiikan opintojaksoa, joista osa voi sisältyä maisterivaiheen varsinaisiin opintoihin ja osa täydentäviin tutkinnon ulkopuolisiin opintoihin.

Ryhmässä C on mahdollista saada kaikkein eniten tukea opiskeluun ja se on tarkoitettu niille opiskelijoille, jotka tarvitsevat paljon kertausta. Opiskelu etenee kuten TTY:n kandivaiheen opiskelijoilla.

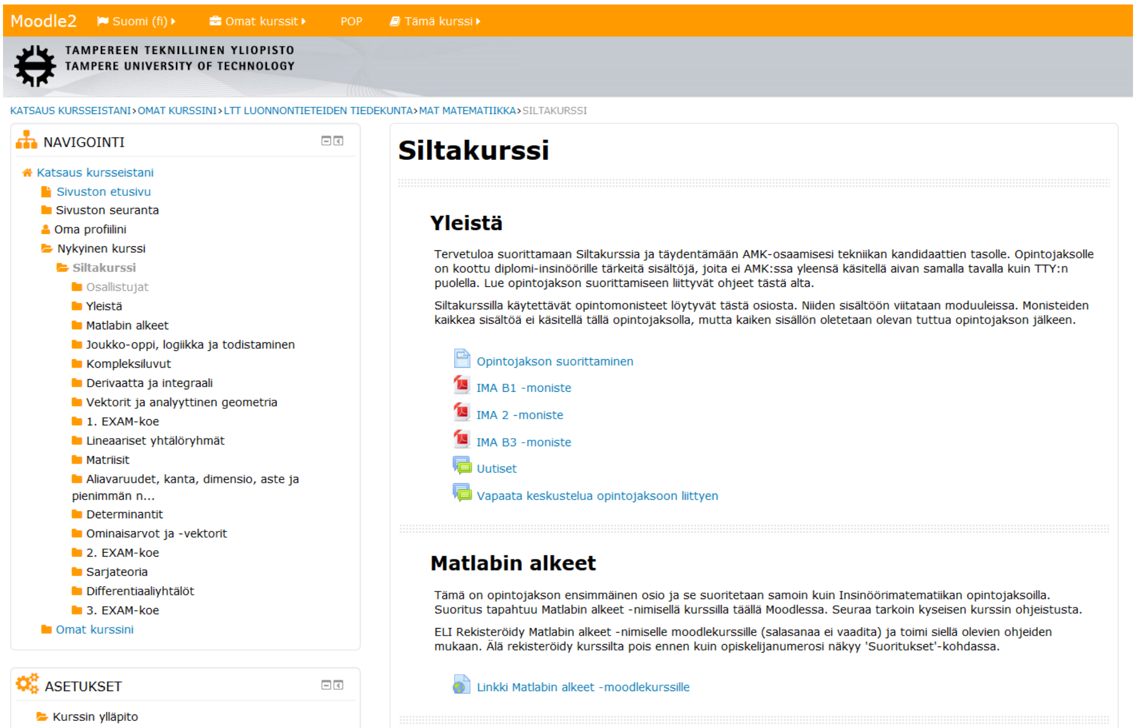
5.2 Opintojakson rakenne

Siltakurssi on pääasiassa Moodlessa oleva opintojakso, joka perustuu monimuoto-opetukseen. Opintojaksosta saa seitsemän opintopistettä, jotka sisältävät taulukon C.2 mukaiset puuttuvat sisällöt ja hieman kertausta. Kaikki materiaalin jakaminen ja opintojaksoon liittyvä tiedotus tapahtuvat Moodlen kautta. Myös osa arvioinnista tapahtuu Moodlessa. Siltakurssi koostuu moduuleista, joiden sisältö on suunniteltu niin, että ne kattavat Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoista ne sisällöt, joita ei AMK-opinnoissa käsitellä riittävästi. Lisäksi mukana on kertaavia tehtäviä keskeisistä sisällöistä. Jokaiseen moduuliin kuuluu teoriaosuuden lisäksi aiheeseen liittyviä videoita, joista osa on TTY:n Matematiikan laitoksen tekemiä ja osa on saatavilla internetissä (mm. Khan Academy ja YouTube). Seuraavaan taulukkoon 5.1 on koottu moduulien aiheet ja niiden jakautuminen EXAM-kokeiden kesken. Kuva 5.1 on yleiskuva opintojakson Moodle-sivulta.

Moduuleihin kuuluu myös harjoitustehtäviä, joita on mahdollista tehdä joko itsenäisesti tai assistentin avustuksella harjoitustilaisuuksissa. Jokainen moduuli päättyy lopputestiin, joka koostuu Moodlessa tehtävistä Stack-tehtävistä. Lopputestien suorituskertoja ei ole rajoitettu, mutta niistä täytyy saada riittävä määrä pisteitä. Testien tehtävät on valittu TTY:n Matematiikan laitoksen tehtäväpankin tehtävistä.

Taulukko 5.1 *Siltakurssin moduulien aiheet ja niiden jakautuminen EXAM-kokeisiin.*

Moduulit	
Matlabin alkeet	
Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen Kompleksiluvut Derivaatta ja integraali Vektorit ja analyyttinen geometria	1. EXAM-koe
Lineaariset yhtälöryhmät Matriisit Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste Determinantit Ominaisarvot ja -vektorit	2. EXAM-koe
Sarjateoria Differentiaaliyhtälöt	3. EXAM-koe



Kuva 5.1 *Siltakurssin Moodle-sivu.*

Lopputestit arvioidaan automaattisesti ja niistä saadut pisteet kirjautuvat Moodlen Arvioinnit-välilehdelle. Kun opiskelija on suorittanut kaikki EXAM-kokeen alueeseen kuuluvat lopputestit hyväksytysti, hän osallistuu sähköiseen EXAM-kokeeseen. Näitä kokeita on opintojaksolla kolme ja niitä jokaista voi yrittää kolme kertaa. Kun opiskelija on suorittanut kaikki lopputestit ja EXAM-kokeet hyväksytysti, hän saa opintojaksosta hyväksytty-merkinnän. Tämän jälkeen hän voi jatkaa muille matematiikan opintojaksoille.

Siltakurssi perustuu verkko-oppimisympäristöön ja se toteutetaan monimuoto-opetuksena, jossa opettajan ja opiskelijan vuorovaikutus maksimoidaan läsnäolotilanteissa flipped classroom -menetelmän avulla. Seuraavassa pohditaan Siltakurssin linkittymistä luvussa 4 esitettyihin teorioihin.

Verkko-opetuksessa on tärkeää panostaa vuorovaikutukseen (kts. kappale 4.4). Siltakurssin Moodle-sivulle on luotu keskustelualue tätä varten. Jos keskustelua ei synny luonnostaan, voi opettaja aika ajoin kirjoittaa jotain aiheeseen liittyvää ja yrittää herätellä opiskelijoita. Matematiikan kirjoittaminen auki ja siitä keskusteleminen oikeilla termeillä on tärkeä taito, jonka on todettu edesauttavan oppimista [12]. Keskustelualueella on myös mahdollista kysyä opintojakson käytännön järjestelyistä ja muusta mieltä askarruttavasta. Jos keskustelu on vilkasta, voi olla syytä luoda jokaista moduulia varten oma palsta. Vuorovaikutusta syntyy myös luonnostaan, jos opiskelija osallistuu opintojakson harjoitustilaisuuksiin, joissa assistentti voi tarvittaessa neuvoa tehtävissä.

Flipped classroom -menetelmässä (kts. kappale 4.3) opiskelija tutustuu oppitunnin aiheeseen jo etukäteen, jotta opettajan ja opiskelijan yhteinen aika voidaan käyttää tarkemmin hyödyksi panostaen kullekin opiskelijalle tärkeisiin aiheisiin eikä yksipuoliseen opettajan esiintymiseen. Kun opiskelija opiskelee moduulin aiheen etukäteen tutustumalla videoihin ja monisteisiin, voi hän harjoitustilaisuuksissa hyödyntää assistentin apua mahdollisimman tehokkaasti kysellen epäselvistä asioista ja pyytäen apua vaikeisiin tehtäviin. Käänteinen opetus sopii hyvin monimuoto-opetukseen.

Konstruktivismin mukaan oppiminen on tiedon rakentamista ja sitä tapahtuu vain oppijan ollessa itse aktiivinen. Oppimiseen vaikuttaa paljon myös yksilöllisyys (kts. kappale 4.2). Siltakurssin harjoitustehtävillä pyritään aktivoimaan opiskelijat itse harjoittelemaan ja tekemään aiheeseen liittyviä tehtäviä. Näin aihe tulee heille tutuksi tehtävien tarjoaminen erilaisten lähestymistapojen kautta. Tällöin asian oppiminen saa uudenlaisia näkökulmia ja ymmärrys monipuolistuu. Oppijan esiymmärrys vaikuttaa uuden asian oppimiseen ja siksi tehtävien tulee olla monipuolisia tarjoten jokaiselle jotakin. Harjoitustehtäviä voi tehdä itselle sopivan määrän, jolloin nopeammin oppivat opiskelijat voivat tehdä vähemmän tehtäviä kuin ne, jotka tarvitsevat paljon harjoitusta.

EXAM-kokeiden arvioinnissa sovelletaan Yrjönsuuren SOLO-mallia (kappale 4.5). Arvosteluun ja arviointiin palataan tarkemmin ensimmäisen EXAM-kokeen yhteydessä kappaleessa 5.3.6.

Siltakurssi voisi Tampere3-hanketta ajatellen olla mahdollista suorittaa TTY:lle jo AMK-opintojen aikana, jolloin opiskelijan siirtyminen diplomi-insinöörin opintoihin olisi mahdollisimman sujuvaa. Pääasiassa Moodlessa oleva opintojakso on helppo suorittaa myös muualla kuin TTY:n kampuksella. EXAM-kokeet mahdollistavat tenttimisen myös muualla kuin TTY:ssa.

5.3 Moduulien ja EXAM-kokeiden sisältö

Tässä kappaleessa esitellään tarkemmin moduulien ja EXAM-kokeiden sisältöjä. Moduuleista, videoista ja muista Siltakurssia varten kootuista aineistoista on pyritty liittämään joitakin kuvia mukaan esimerkeiksi.

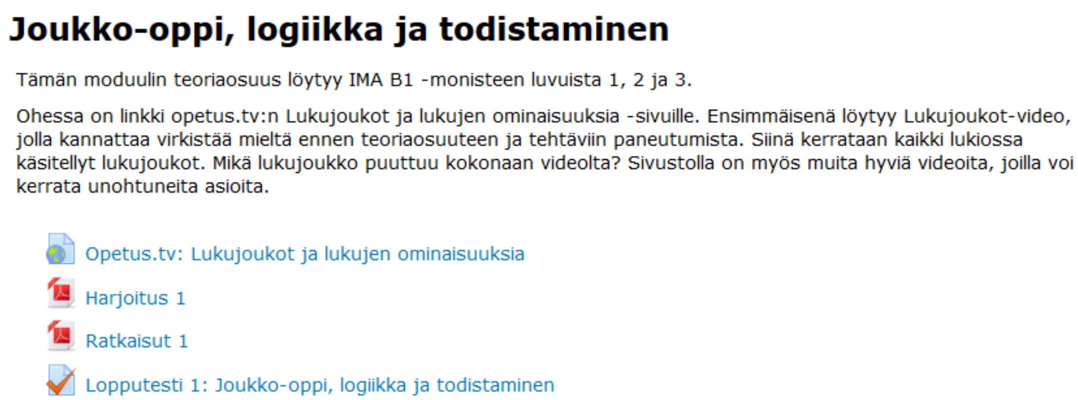
5.3.1 Matlabin alkeet

Matlabin alkeet -moduuli suoritetaan samalla tavalla kuin ensimmäisen vuoden opiskelijat sen suorittavat osana Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksoa. Moduuli sisältää lyhyitä opetusvideoita ja niihin liittyviä Stack-tehtäviä.

5.3.2 Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen

Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen muodostavat ensimmäisen varsinaisen Siltakurssin moduulin. TAMK:n matematiikan opintojaksoilla ei harjoitella joukko-opin ja logiikan sisältöjä ja siksi tämä moduuli sisältää yksinkertaisia asioita niihin liittyen. Tehtävissä harjoitellaan mm. yhdisteen, leikkauksen ja komplementin käyttöä sekä tutustutaan totuustauluihin ja tautologiaan. Predikaattilogiikka ja konnektiivit käsitellään myös. Todistamisen osalta harjoitellaan suoraa ja epäsuoraa todistusta sekä induktiotodistusta.

Moduuli alkaa opetus.tv:n Lukujoukot-videolla, joka on julkaistu alun perin lukion pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin videoiden joukossa. Video on hyvää kertausta lukujoukoista. Siitä kuitenkin puuttuvat kompleksiluvut kokonaan, koska ne eivät kuulu lukion kurssien sisältöihin. Moduulin johdantotekstissä muistutetaan tästä kysymällä: ”Mikä lukujoukko puuttuu kokonaan videolta?” Kuvassa 5.2 on tämän moduulin osio Moodlesta.



Kuva 5.2 *Joukko-oppi, logiikka ja todistaminen -moduuli Moodlessa.*

Tämän moduulin harjoitustehtävissä on neljä tehtävää joukko-oppiin liittyen. Niissä harjoitellaan yhdisteen, leikkauksen, erotuksen ja komplementin käsitteitä. Sanallisessa tehtävässä tutustutaan Venn-diagrammiin ja yhdisteen mahtavuuteen. Joukko-opin viimeinen tehtävä käsittelee osittelu-, liitäntä- ja vaihdantalakeja sekä niiden avulla sieventämistä ja vaatii myös de Morganin lain käyttämistä.

Logiikan osalta harjoitustehtävissä käsitellään kvanttoreita sanallisen tehtävän ja tosi/epätosi-väitteiden kautta. Konnektiivi-tehtävässä sievennetään de Morganin lain ja osittelulain avulla. Viimeisessä logiikan tehtävässä tehdään totuustaulu ja tutkitaan sen avulla, onko väite tautologia.

Todistamisen osuus tehtävistä on viimeisenä. Tehtävät sisältävät yhden suoran ja epäsuoran todistuksen sekä kaksi induktiotodistusta, joista toisessa pitää etsiä virhe esitetystä todistuksesta ja toisessa itse todistaa induktion avulla. Todistaminen on selkeä kokonaisuus, jota ei TAMK:n opintojaksoilla juuri harjoitella. Siksi se nostetaan esille heti Siltakurssin alussa. Näin myöhemmässä vaiheessa opintojaksolla voidaan todistaa tuloksia helpommin ilman muistutusta alkeista.

Ensimmäisen moduulin lopputestiin sisältyy viisi tehtävää, joista kaksi ensimmäistä liittyy yhdisteen, leikkauksen, erotuksen ja komplementin määrittelyyn, kolmas kvanttoreihin, neljäs totuustauluun ja konnektiiveihin ja viides induktiotodistukseen. Tehtävät ovat Stack-tehtäviä. Kuvassa 5.3 on esimerkki kompleksilukuihin liittyvästä Stack-tehtävästä.

Stack-tehtävät on toteutettu niin, että osa tehtävän arvoista voi muuttua riippuen suorituskerrasta. Tällöin kahdelle opiskelijalle voi tulla samasta tehtävästä eri arvot eikä vastauksen kopioiminen suoraan toiselta auta.

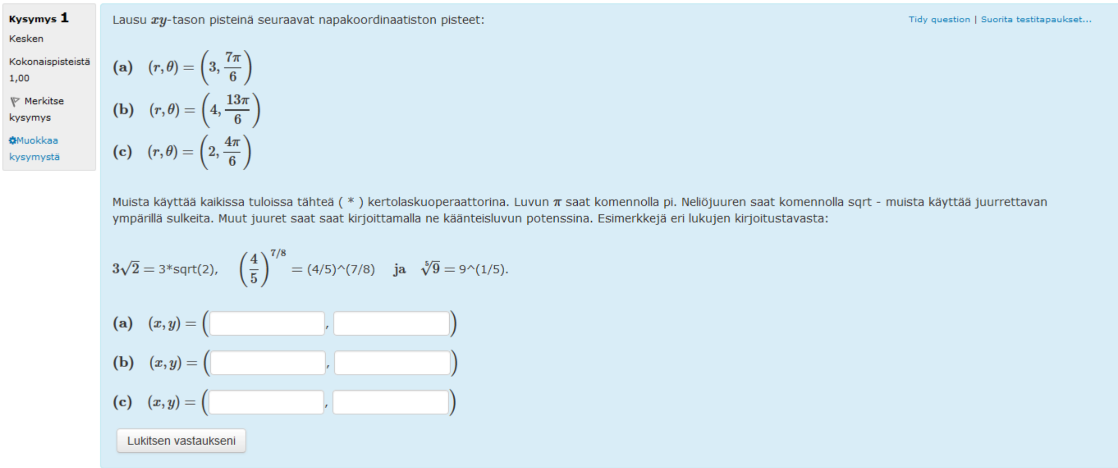
5.3.3 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut -moduulin tavoitteena on kerrata AMK:sta tuttua aihetta siihen liittyvillä perustehtävillä, joissa käsitellään kompleksilukujen laskusääntöjä, erilaisia esitysmuotoja, Eulerin ja De Moivren kaavoja. Lisäksi moduulissa opetellaan kompleksisen juuren ja polynomin ratkaiseminen. Kompleksiluvut ovat tärkeitä insinööreille ja siksi moduulissa painotetaan erityisesti peruslaskutaitojen harjoittelua.

Tähän moduulin on valittu sopivia videoita Khan Academystä. Ensimmäinen video on muistutus neliöjuureen liittyvästä vaarasta, jossa vastaluvut saadaan yhtä suuriksi unohtamalla, ettei neliöjuuren sisällä olevaa tuloa voi jakaa neliöjuurien tuloksi, jos molemmat tulontekijät ovat negatiivisia. Neljässä muussa videossa näytetään kompleksilukujen jakolaskusta esimerkkejä sekä opastetaan kompleksiluvun potenssin ja juuren kanssa.

Harjoitustehtäviä on yhteensä yhdeksän. Ensimmäisessä harjoitellaan kompleksiluvuilla laskemista. Toisessa tehtävässä kerrataan xy-tason ja napakoordinaatiston välistä koordinaattimuunnosta. Kahdessa seuraavassa tehtävässä harjoitellaan summa- ja eksponenttimuotojen välistä muunnosta ja eksponenttimuodolla laskemista. Tehtävissä viisi, kuusi ja seitsemän opetellaan ratkaisemaan yhtälö, jonka ratkaisuista ainakin yksi on kompleksinen. Kahdeksas tehtävä on ongelmanratkaisua ja siinä pohditaan, missä kompleksitason pisteissä luku on reaalinen. Viimeisessä tehtävässä ratkaistaan yhtälö sekä tutkitaan, millä vakion arvoilla erään yhtälön ratkaisut ovat imaginäärisiä.

Tämän moduulin lopputestissä on viisi tehtävää, jotka keskittyvät xy-tason ja napakoordinaatiston välisiin muunnoksiin sekä summa- ja eksponenttimuotojen muuntamiseen. Lisäksi testataan kompleksilukujen potenssilaskua ja yhtälön ratkaisemista. Kuvassa 5.3 on yksi tämän moduulin Stack-tehtävistä.



Kuva 5.3 *Esimerkki kompleksilukuihin liittyvästä Stack-tehtävästä Moodlessa.*

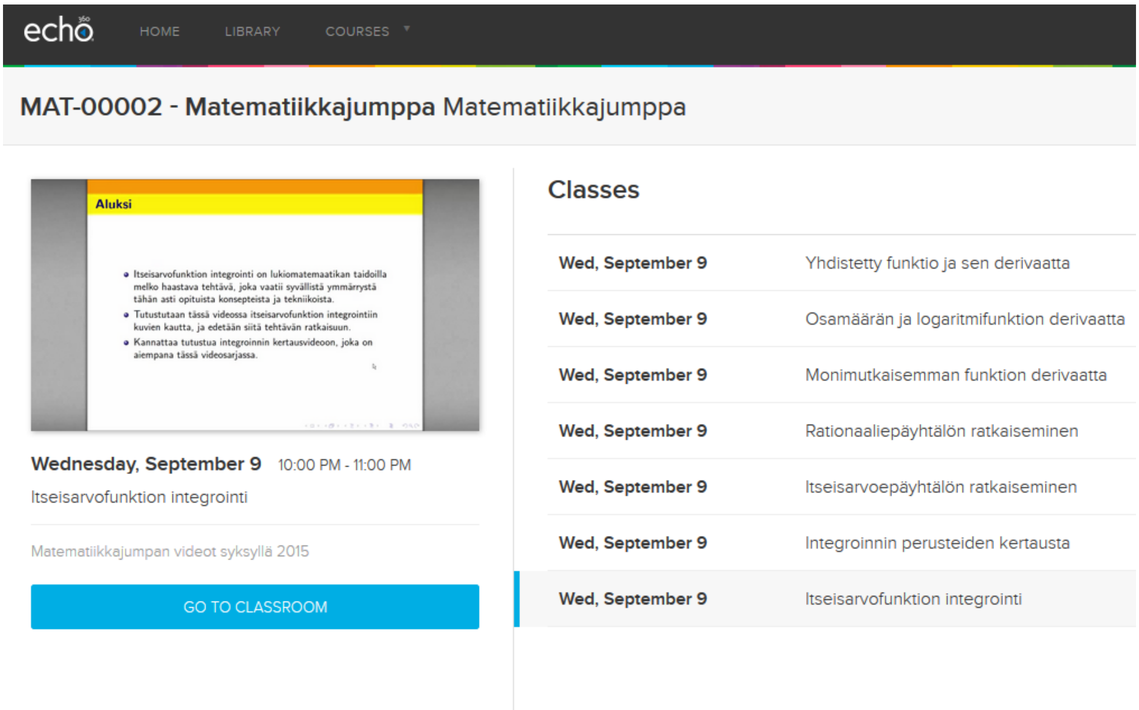
5.3.4 Derivaatta ja integraali

Tämän moduulin videoista neljä on TTY:ssa tehtyjä opetusvideoita, jotka ovat suomeksi. Niissä kerrataan derivointia ja yhdistetyn funktion derivaattaa sekä integraalia. Matematiikkajumpan videot löytyvät Echo360-videopalvelusta (kuva 5.4). Lisäksi Khan Academysta on neljä videota, joissa käsitellään erilaisia integroinnin tilanteita, kuten osamurtokehitelmää ja rationaalifunktion integrointia sekä osittaisintegrointia ja epäoleellista integraalia.

Derivaatta ja integraali -moduulin tavoitteina on kerrata integrointia ja derivointia. Tässä moduulissa on paljon (12 kpl) harjoitustehtäviä, mutta ei kuitenkaan ole pakko tehdä kaikkia. Mukana on useita kertaustehtäviä, koska aihe on tärkeä jatkon kannalta.

Tehtävissä kerrataan derivaatan määritelmä, harjoitellaan ketjusäännön käyttämistä ja muistellaan l'Hospitalin sääntöä. Integroinnista on perustehtävä, jossa harjoitellaan erilaisten alkeisfunktioiden integrointia. Rationaalifunktion integrointia ja integrointia sijoituksen avulla opetellaan kumpaakin kahden tehtävän avulla. Lisäksi harjoitustehtäviin kuuluu osittaisintegrointia ja epäoleellisen integraalin harjoittelua. Myös minoranttiperiaatetta käytetään yhdessä tehtävässä. Viimeisessä tehtävässä todistetaan erotusosamäärän raja-arvoa käyttäen, että funktion derivaatta on väitteen mukainen.

Lopputestissä on kuusi tehtävää, joissa kerrataan derivointiin ja integrointiin liit-



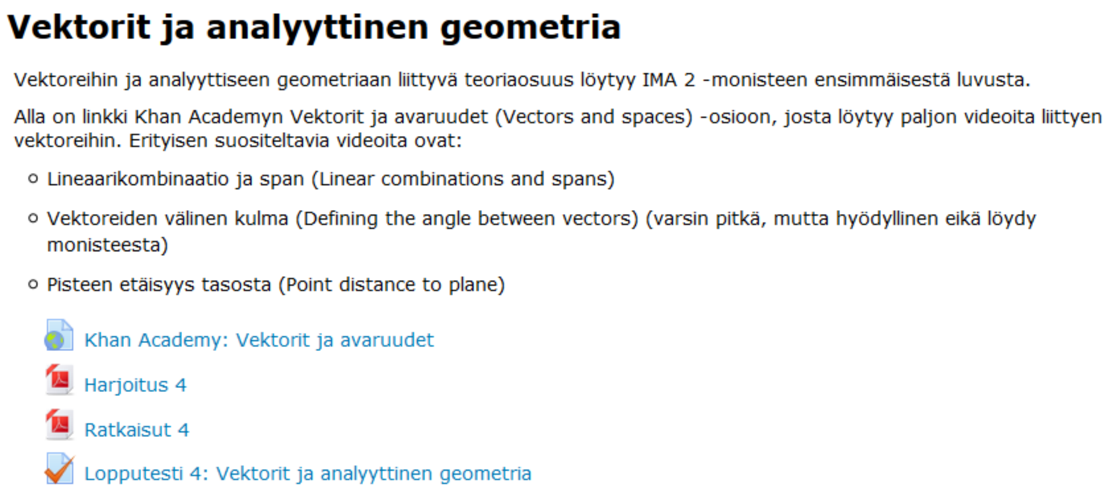
Kuva 5.4 *Matematiikkajumpan videot Echo360-palvelussa.*

tyviä keskeisiä asioita. Ensimmäinen ja viimeinen tehtävä käsittelevät derivointia. Ensimmäisessä lasketaan alkeisfunktioiden derivaattoja ja viimeisessä optimoidaan pisintä mahdollista pituutta. Loput neljä tehtävää koskevat integrointia. Lopputestin toinen tehtävä sisältää yhdistetyn funktion integrointia, kolmas määrätyn välin integraalin laskemista ja neljäs rationaalifunktion integrointia, jossa täytyy tehdä osamurtokehitelmä. Viides tehtävä käsittelee epäoleellista integraalia. Tähän lopputestiin sopisi lisäksi hyvin esimerkiksi suoraan todistukseen liittyvä tehtävä. Niiden toteuttaminen Stack-tehtävinä on kuitenkin hieman hankalaa. Lopputesti on koottu jo olemassa olevista tehtävistä, joihin ei kuulunut derivointiin liittyviä todistustehtäviä.

5.3.5 Vektorit ja analyyttinen geometria

Tämän moduulin tavoitteena on, että opiskelija saa palautettua mieleensä lineaarikombinaation sekä vektoreiden välisen etäisyyden, vektorin projektion ja vektorikolmitulon laskemisen. Myös suoran ja tason yhtälöiden eri muodot ja metriikan ehdot kerrataan. Tällä moduulilla luodaan pohja ensimmäisen EXAM-kokeen jälkeen alkavaa matriisilaskentaa varten.

Vektorit ja analyyttinen geometria -moduuliin sopivia videoita löytyy Khan Academysta useita. Moodlessa onkin suora linkki Khan Academyn Vektorit ja avaruudet -sivulle, josta opiskelija voi itse valita hänelle parhaiten sopivat videot. Moduuliin on kuitenkin koottu kolmen kohdan lista erityisen suositeltavista videoista, joissa käsitellään lineaarikombinaatiota, vektoreiden välistä kulmaa sekä pisteen etäisyyttä tasosta. Kuvassa 5.5 on tämän moduulin osio Moodlessa.



Kuva 5.5 *Vektorit ja analyyttinen geometria -moduulin osio Moodlessa.*

Harjoitustehtäviä on koottu tähän moduuliin yhteensä kahdeksan. Niistä kahdessa ensimmäisessä käsitellään lineaarikombinaatiota. Ensimmäisessä tehtävässä harjoitellaan vektoreiden kertomista skalaarilla sekä etsitään annetuille vektoreille sellaisia kertoimia, joiden avulla joukon viimeinen vektori voidaan esittää. Toinen tehtävä on lineaarikombinaatioon liittyvä sanallinen tehtävä. Kolmannessa tehtävässä lasketaan kahden vektorin normit, pistetulo ja niiden välinen kulma. Neljäs tehtävä käsittelee vektorikolmituloa, siinä myös kehotetaan tarkistamaan vastaus WolframAlphalla, joka on internetissä toimiva haku- ja vastauskone. Viidennen tehtävän aiheena on projektio ja kuudennessa käsitellään vektoreiden välistä etäisyyttä sekä metriikan ehtoja. Kaksi viimeistä tehtävää kertaavat suoran ja tason yhtälöt sekä tason ja pisteen etäisyyden laskemisen.

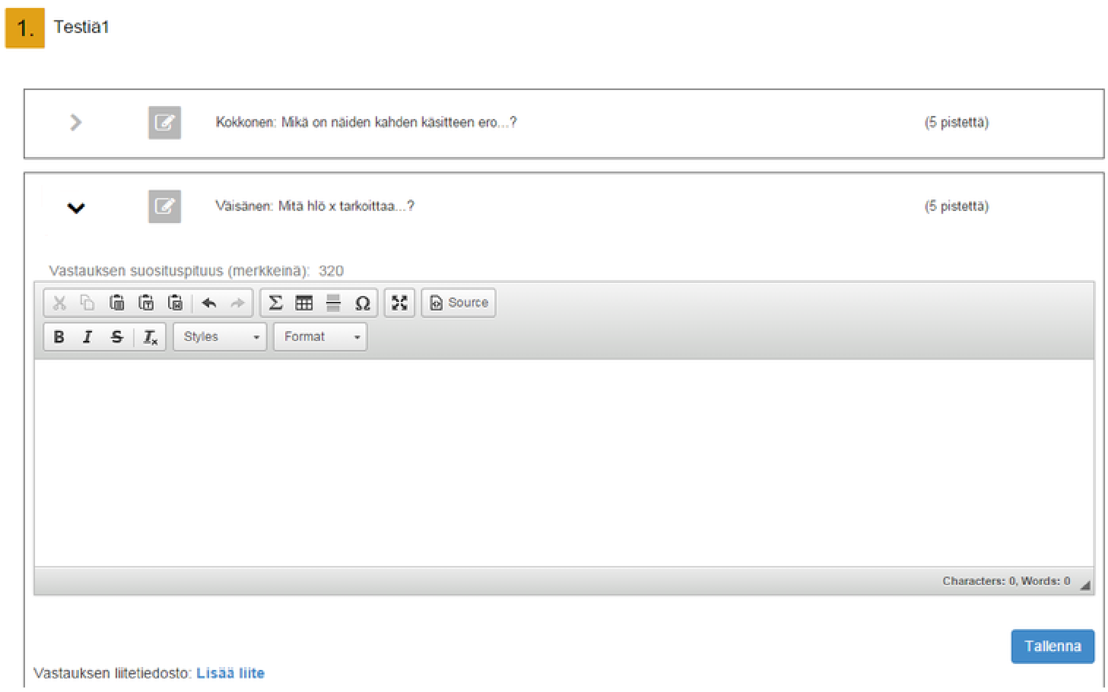
Lopputesti sisältää myös kahdeksan tehtävää, jotka kaikki ovat lyhyitä perustehtäviä. Tehtävässä yksi lasketaan risti- ja vektorikolmitulo sekä tarkistetaan tulos Matlabilla. Seuraavassa tehtävässä on vuorossa pistetulon ja vektoreiden välisen kulman laskeminen. Kolmannen tehtävän aiheena on kohtisuoruus ja neljännen projektio.

Viides tehtävä on lineaarikombinaatiosta, ortogonaalisuudesta sekä yksikkövektorista. Siinä pitää ratkaista vakio t siten, että annettu vektori voidaan esittää kahden muun vektorin lineaarikombinaationa, annetut vektorit ovat ortogonaaliset ja annettu vektori on yksikkövektori. Kuudennessa tehtävässä pyydetään esittämään annettu vektori kahden muun lineaarikombinaationa eli määrittämään sopivat kertoimet vektoreille. Tehtävässä seitsemän lasketaan pisteen etäisyys suorasta, jonka kaksi pistettä tunnetaan. Viimeisessä tehtävässä selvitetään tason yhtälö, kun sen kolme pistettä ovat tunnettuja.

5.3.6 1. EXAM-koe

Ensimmäisessä EXAM-kokeessa testataan ensimmäisten neljän moduulin (joukko-oppi, logiikka ja todistaminen, kompleksiluvut, derivaatta ja integraali sekä vektorit ja analyyttinen geometria) aiheita. Kokeessa on neljä tehtävää, joista on jokaisesta mahdollista saada kuusi pistettä. Esimerkkikoe on liitteessä D. Koe tehdään sähköisellä tenttijärjestelmällä EXAM:lla ja siihen on aikaa kaksi tuntia ja 50 minuuttia. Järjestelmässä on mahdollista käyttää Word-tekstinkäsittelyohjelmaa, tavallista laskinta sekä Matlabia. Järjestelmään sisältyy myös muita ohjelmistoja, mutta ne eivät ole matematiikan kokeen kannalta tärkeitä. Vastauskenttiin opiskelija voi kirjoittaa matemaattisia merkintöjä TeX-editorin avulla. Vastaukseen voi liittää yhden tiedoston, mikä mahdollistaa opiskelijalle vastauksen kirjoittamisen myös Wordilla. Internetiin pääsy on järjestelmässä estetty, joten sieltä ei voi hakea apua edes erilaisten merkintöjen syntakseihin TeX:iin. EXAM-järjestelmään on kuitenkin tarkoitus lisätä lyhyt TeX-ohje helpottamaan oikean syntaksin löytämistä. Matlabin ohjesivut toimivat tentissä. Esimerkkikoe on tehty Wordillä ja sen voi laittaa EXAM-kokeeseen liitteeksi, jotta opiskelija voi halutessaan kirjoittaa vastauksensa samaan tiedostoon. Kuvassa 5.6 nähdään, miltä EXAM-järjestelmän kysymysten asettelu näyttää opiskelijalle tenttitilanteessa.

Seuraavaksi esitellään ensimmäiseen kokeeseen valitut tehtävät ja perustellaan valintoja luvun 3 teorian avulla. Jokaisesta tehtävästä on valmisteltu arviointiohjeet, joissa otetaan kantaa siihen, miten tehtävistä on mahdollista saada pisteitä. Ohjeet mallivastauksineen ovat liitteessä E. Pisteitä jaetaan oikeista asioista vastauksessa eikä niinkään vähennetä aina tietynlaisen virheen esiintyessä, kuten Yrjönsuuren mallissa on tavoitteena. SOLO-mallin tiedon tasot on esitelty aiemmin taulukossa 4.1.



Kuva 5.6 *EXAM-järjestelmän ulkoasu tentin aikana. [8]*

Ensimmäisessä tehtävässä on kaksi kohtaa, joista toisessa lasketaan kosinin tarkka arvo summakaavan avulla. Opiskelijan pitää osata jakaa annettu kulma sopiviin yhteenlaskettaviin ja selvittää niiden kosinin ja sinin arvot yksikköympyrää ja muistikolmioita käyttäen. Tästä kohdasta saa kolme pistettä. Erilaisia tapoja kulman jakamiseen summaksi on useita ja kaikki vaihtoehdot käyvät. Tästä saa pisteen. Puolikkaan pisteen saa ensimmäisestä oikein lasketusta kulmasta ja toisen puoli pistettä, jos loputkin on laskettu oikein. Viimeisen pisteen saa, kun on osannut laskea kulmien arvot oikein yhteen. Pelkästä vastauksesta saa pisteen, mutta vastauksen likiarvosta ei mitään. Kulmien laskemisesta saatavat pisteet jaetaan vain, jos opiskelija on kirjoittanut ylös kulmista saatavat arvot.

Ensimmäisen tehtävän b-kohdassa on annettu erään kompleksiluvun kolmas juuri ja siinä pyydetään selvittämään alkuperäinen luku sekä laskemaan muut juuret. Tehtävän voi laskea eksponenttimuotojen kautta ja mallivastaus on kirjoitettu niiden avulla, mutta myös esimerkiksi vastauksen graafinen perustelu käy. Eksponenttimuotoja ei vaadita vastauksessa. Oikein lasketusta alkuperäisestä luvusta saa pisteen. Toisen pisteen saa, kun on perustellut, miten muut juuret löytyvät. Molemmista juurista saa puoli pistettä, kun ne on laskettu oikein. B-kohdan maksimipisteet ovat kolme.

Ensimmäisen tehtävän kohtien avulla nähdään, onko opiskelijan ajattelun taso kompleksilukujen ja trigonometristen funktioiden osalta rakenteetonta, yksirakenteista vai monirakenteista. Ylemmille ajattelun tasoille ei tällä mekaanisella tehtävällä ylletä. Jos opiskelija saa osista täydet pisteet, hänen ajattelunsa on luultavasti monirakenteista. Täysiin pisteisiin hänen on täytynyt perustella vastauksensa ja kirjoittaa välivaiheet näkyviin.

Toinen tehtävä käsittelee todistamista. Siinä pyydetään tekemään induktiotodistus, jossa pyritään osoittamaan, että seuraavan summan kaava on $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Pisteitä jaetaan induktiotodistuksen vaiheista siten, että alkuaskeleesta, induktio-oletuksesta ja induktioväitteestä saa kustakin pisteen ja loput pisteet annetaan induktiotodistuksesta. SOLO-mallin tiedon tasoista tässä tehtävässä voidaan päästä konkreettisten yleistysten tietämisen tasolle eli tasolle neljä. Tälle tasolle on vaikea päästä peruslaskutehtävillä, koska ne eivät vaadi laajaa asian ymmärtämistä. Kuuden pisteen vastauksen tulee olla johdonmukainen ja ristiriidaton kokonaisuus, jossa opiskelija esittää ja muotoilee vastauksensa yksikäsitteisesti. Opiskelijan heikko ymmärrys käy vastauksesta helposti ilmi. Opiskelija on esimerkiksi saattanut käyttää väitettä todistaessaan sitä, mikä on väärin ja osoittaa opiskelijan tiedon tason olevan alhainen. Jos opiskelijan tiedon taso aiheesta on rakenteetonta (taso 1), niin hän ei saa kirjoitettua vastaukseensa mitään oikeaa.

Kolmannessa tehtävässä on niin ikään kaksi kohtaa. Niistä ensimmäisessä lasketaan raja-arvo. Sen laskemiseksi tarvitaan joko l'Hospitalin sääntöä, tai sarjakehitelmiä. Mallivastauksessa on käytetty l'Hospitalin sääntöä. Tästä kohdasta voi saada maksimissaan kolme pistettä. Niistä ensimmäisen saa, kun on tunnistanut raja-arvon laskemiseen liittyvän ongelman (0/0). Opiskelijan ei tarvitse osata nimetä menetelmää l'Hospitaliksi. Toisen pisteen saa, kun on osannut käyttää valitsemaansa menetelmää oikein, eli l'Hospitalin tapauksessa derivoida oikein. Puolikkaan pisteen saa, kun perustelee, miksi raja-arvon voi sijoittaa lausekkeeseen. Viimeinen puoli pistettä on jaossa oikeasta vastauksesta.

Kolmannen tehtävän toisessa kohdassa pyydetään laskemaan annetun funktion derivaatta käyttäen erotusosamäärän raja-arvoa apuna. Tarvittava kaava on annettu tehtävässä. Opiskelija saa ensimmäisen pisteen, kun hän on osannut käyttää kaavaa ja sijoittaa siihen annetun funktion. Sievennyksestä ei jaeta pisteitä. Toinen piste on jaossa, kun huomaa, että osa termeistä menee nollaan. Viimeisen pisteen saa oikeasta vastauksesta. Tämä tehtävä samoin kuin ensimmäinenkin tutkii, millä kolmesta alimmasta tiedon tasosta opiskelijan ymmärrys aiheesta on. Täydet pisteet saanut opiskelija omaa monirakenteisen tiedon aiheista, vajaaseen pistemäärään päätynyt opiskelija on tiedon tasolla kaksi. Jos opiskelijan osaaminen on rakenteetonta, hän ei saa tehtävästä pisteitä.

Viimeinen tehtävä on sanallinen ja liittyy derivointiin. Siinä täytyy itse luoda tarvittava funktio ja päätellä, miten sen kanssa pitää toimia. Tehtävässä ei ole yhtään lukua, joten se on abstraktimpi kuin edelliset. Ensimmäisen pisteen saa, kun opiskelija on osannut luoda funktion raketin korkeudelle. Toinen piste on jaossa, jos opiskelija on löytänyt nopeuden yhteyden korkeuden aikaderivaattaan. Kolmannen pisteen saa, jos opiskelija osaa derivoida muodostamansa funktion. Tehtävässä annetun suureen β ja kulman α aikaderivaatan yhteyden löytämisestä saa pisteen. Viidennen pisteen saa, jos löytää nopeudelle lausekkeen, ja sijoittaa siihen tehtävässä annetut suureet α ja β. Tehtävässä pyydettiin piirtämään kuva ja siitä saa pisteen.

Neljäs tehtävä tutkii, mille neljästä alimmasta tiedon tasosta opiskelija yltää. Konkreettisten yleistysten tietämisen tasolla oleva opiskelija on osannut ratkaista tehtävän oikein ja saa suorituksestaan täydet kuusi pistettä. Monirakenteisen tiedon tasolla oleva vastaus sisältää oikeita elementtejä ja niitä on osattu yhdistää toisiinsa osittain oikein. Vastaus ei kuitenkaan etene täysin loogisesti. Yksirakenteisella tiedon tasolla olevan opiskelijan vastauksessa on jotain oikeaa, mutta siitä puuttuu tehtävän kokonaisuuden hallinta täysin. Rakenteeton tiedon taso vastauksessa johtaa nollaan pisteeseen.

5.3.7 Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaaristen yhtälöryhmien osalta Siltakurssilla on tavoitteena opetella tai kerrata, miten yhtälöryhmiä ratkaistaan ja milloin niillä on samat ratkaisujoukot, kuinka matriisin redusoitu vaarariviporrasmuoto lasketaan ja mikä on matriisin aste. Tämän moduulin aiheita käsitellään nykyisen jaon mukaan Insinöörimatematiikka 2 -opintojaksolla.

Moduuliin on valittu YouTubesta kaksi esimerkkivideota, joissa ratkaistaan yhtälöryhmä Gauss-Jordanin eliminointimenetelmän avulla.

Viidennen moduulin harjoitustehtäviin sisältyy kuusi tehtävää. Ensimmäisessä tehtävässä käsitellään yhtälöryhmän ratkaisemista Gauss-Jordanin eliminointimenetelmällä ja toisessa harjoitellaan matriisin redusoidun vaakariviporrasmuodon selvittämistä sekä tutustutaan siihen, mikä on matriisin aste. Kolmannessa tehtävässä harjoitellaan eliminointimenetelmän soveltamista kemian reaktioyhtälön tasapainottamiseen. Seuraavassa tehtävässä tutustutaan tilanteeseen, jossa vektoriyhtälöllä ei ole ratkaisua. Toiseksi viimeisessä tehtävässä harjoitellaan ratkaisun tulkitsemista rref-muotoisesta matriisista ja kirjoitetaan matriisin avulla yhtälöryhmät. Kuudes tehtävä käsittelee sitä, miten yhtälöryhmän kertoimien valinta vaikuttaa ratkaisun olemassaoloon ja siihen, onko ratkaisu yksikäsitteinen vai onko ratkaisuja äärettömän monta.

Tämän moduulin lopputesti sisältää neljä tehtävää, joista kahdessa käsitellään rref-muotoa ja matriisin astetta. Toisessa ja neljännessä tehtävässä testataan opiskelijan taitoa ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä.

5.3.8 Matriisit

Matriisit -moduulin tavoitteena on palauttaa opiskelijalle mieleen matriisien peruslaskutoimitukset, lineaarinen riippumattomuus sekä käänteismatriisien muodostaminen. Tähän moduulin on valittu YouTubesta kaksi videota, joissa käsitellään lineaarista riippuvuutta ja riippumattomuutta.

Tässä moduulissa on 11 harjoitustehtävää, joista kolmessa ensimmäisessä käsitellään lineaarista riippumattomuutta ja vektoreiden virittämää joukkoa. Kolmas tehtävä on todistustehtävä, jossa harjoitellaan suoraa todistusta. Neljäs tehtävä sisältää helppoja peruslaskutoimituksia matriiseilla. Viidennessä tehtävässä johdetaan matriisin potenssin kaava tehtävässä annetulle matriisille. Kuudennessa tehtävässä todistetaan vastaesimerkin avulla, että matriisitulo ei ole vaihdannainen eikä tulon nollasääntö päde. Seitsemäs tehtävä harjoituttaa käänteismatriisin muodostamista Gauss-Jordanin eliminointimenetelmällä. Kahdeksas tehtävä käsittelee matriisituloa ja negatiivista potenssia. Yhdeksännessä tehtävässä on matriisin ja vektoreiden välisiä laskuja. Kymmenennessä tehtävässä tutkitaan käänteismatriisin olemassaoloa ja viimeisessä tehtävässä todistetaan väite $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matriisit -moduulin lopputesti sisältää viisi tehtävää, joista ensimmäisessä ja toisessa on matriisien peruslaskutoimituksia, kuten summa, skalaarilla kertominen ja matriisitulo. Kolmannessa tehtävässä on tarkoituksena laskea matriisitulon inverssi ja neljännessä muodostaa käänteismatriisi. Viimeinen tehtävä sisältää vektorin transpoosin, matriisin neliön ja vektorin tulon.

5.3.9 Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste

Tämän moduulin tarkoituksena on syventää ymmärrystä matriiseista tutustumalla aliavaruuksiin ja avaruuksien virittäviin vektoreihin eli kantoihin. Myös matriisin dimensiot ja aste tulevat tutuiksi. Sisältövertailun perusteella avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa lukuun ottamatta tämän moduulin aiheet ovat vieraita AMK-insinööreille. Moduulin osuus Moodlessa näyttää kuvan 5.7 mukaiselta.

Kuva 5.7 *Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste -moduulin osio Moodlessa.*

Khan Academystä löytyy useita hyviä videoita aiheeseen liittyen. Niitä katsomalla ja monisteen teoriaosuuteen tutustumalla opiskelija pääsee alkuun uudessa aiheessa. Harjoitustehtävien kautta ymmärrys syvenee. Tämän moduulin sisältö tarjoaa abstraktiotasoltaan korkeampia haasteita kuin aiemmat. Juuri abstraktiotaso on merkittävin ero yliopiston ja AMK:n matematiikan välissä.

Harjoitustehtäviä on viisi ja harjoitustehtävät ovat liitteessä F esimerkkinä mahdollisista viikkoharjoituksista. Niistä ensimmäinen johdattelee aiheeseen ja pyytää opiskelijaa selittämään omin sanoin, mikä on aliavaruus. Kielentämisellä pyritään syventämään opiskelijan ymmärrystä aiheesta. Toinen tehtävä liittyy myös aliavaruuksiin. Siinä todistetaan, että nolla-avaruus on aliavaruus. Todistustehtävillä saadaan nostettua opiskelijan abstraktia ymmärrystä aiheesta. Kahdessa seuraavassa tehtävässä pyydetään selvittämään annettujen matriisien ja niiden redusoitujen vaakariviporrasmuotojen avulla sarake- ja nolla-avaruuksien kannat ja dimensiot sekä kertomaan, mikä on matriisin aste. Nämä tehtävät käsittelevät moduulin ydinasiaa ja siksi niitä on kaksi. Viimeisessä tehtävässä pyydetään opiskelijaa toteamaan, että annettu vektorijoukko muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaalin kannan sekä muodostamaan tämän kannan lineaarikombinaationa annettu vektori u.

Lopputestiin on koottu kolme tehtävää, joista ensimmäisessä etsitään vakio, jolla matriisin aste on 2. Toisessa tehtävässä selvitetään, mitkä annetuista vektorijoukoista muodostavat ortogonaalisen joukon, lineaarisesti riippuvan joukon ja avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Kolmannessa tehtävässä muodostetaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta siten, että yksi virittävistä vektoreista on annetun suuntainen.

5.3.10 Determinantit

Moduuliin sisältyy erilaisiin determinantin ominaisuuksiin tutustumista ja niillä operoimista. Moduulissa tarkastellaan myös $n \times n$ -matriisin determinanttia. Moduuliin sopivia videoita löytyy Khan Academystä muutamia ja niiden avulla opiskelijan pitäisi päästä aiheeseen käsiksi. Pienien matriisien determinantteja on tarkasteltu jo AMK:ssa, mutta niiden avulla pääsee asiaan uudelleen mukaan ja siksi harjoitustehtävissä on joitakin tavallisia laskutehtäviä. Pitää myös muistaa, että isojen matriisien determinanttien laskeminen on työlästä.

Harjoitustehtävistä ensimmäisessä määritetään matriisin yhtenä alkiona olevan vakion arvo siten, että matriisin determinantti on annetun suuruinen. Toisessa tehtävässä lasketaan 3×3 -matriisin determinantti, selvitetään sen aste sekä sievennetään matriiseista muodostuva lauseke ja lasketaan se. Kolmannessa tehtävässä on tarkoituksena laskea 4×4 -matriisin determinantti ja vihjeessä kehotetaan opiskelijaa ensin muokkaamaan matriisia, jotta laskeminen olisi helpompaa. Tätä tehtävää ajatellen Moodlessa on video siitä, kuinka matriisista muokataan ensin yläkolmiomatriisi, jonka jälkeen determinantti on diagonaalialkioiden tulo. Neljännessä tehtävässä pyydetään valitsemaan annetuista neljästä vektorista kolme lineaarisesti riippumatonta ja esittämään neljäs vektori edellisten lineaarikombinaationa. Tässä tavoitellaan opiskelijan oivallusta siitä, että matriisin sarakkeiden ollessa lineaarisesti riippumattomia on determinantti nollasta poikkeava. Viimeisessä tehtävässä todistetaan, että jos $A^2 = A$, niin matriisin A determinantti on 0 tai 1. Todistustehtävät ovat hyviä opiskelijan abstraktin ymmärtämisen parantamiseksi.

Lopputestiin on valittu kolme tehtävää, joista ensimmäisessä lasketaan 3×3 -matriisin ja 4×4 -matriisin determinantit. Suurempi matriisi sisältää paljon nolla-alkioita ja siitä kannattaa valita eniten nollia sisältävä rivi tai sarake, jonka mukaan kehittää determinantin. Tällöin lasku jää yksinkertaiseksi. Toisen tehtävän matriisissa on tuntematon vakio, jonka suuruus pitää selvittää, kun tiedetään, että matriisin determinantti on nolla. Viimeinen tehtävä sisältää monimutkaisen lausekkeen, jonka determinantti pyydetään laskemaan. Tehtävässä kannattaa sieventää lauseketta determinantin laskusääntöjen avulla ja vasta sitten laskea determinantin arvo. Tällöin lasku jää yksinkertaiseksi.

5.3.11 Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvot ja -vektorit on viimein moduuli, joka kuuluu toiseen EXAM-kokeeseen. Tämän moduulin tavoitteena on, että opiskelija oppii laskemaan matriisin ominaisarvot ja -vektorit sekä muodostamaan ominaisavaruuden kannan. Opiskelija myös tutustuu erilaisiin ominaisarvon ominaisuuksiin. Aiheeseen liittyviä videoita löytyi Khan Academystä. Niitä katselemalla ja monisteen teoriaan tutustumalla opiskelijan tulisi päästä alkuun harjoitustehtävissä. Tämän moduulin sisällöt kuuluvat SEFIn tasolle 2.

Harjoitustehtäviä on viisi ja niissä harjoitellaan ominaisarvojen, -vektoreiden ja -avaruuksien selvittämistä. Ensimmäisessä tehtävässä lasketaan 2×2 -matriisin ominaisarvot ja -vektorit, toisessa tehtävässä on annettu 3×3 -matriisi ja pyydetään selvittämään sille äskeisten lisäksi myös spektri, sekä algebralliset ja geometriset kertaluvut. Kolmannessa tehtävässä lähestytään aihetta toisesta suunnasta selvittämällä tunnettujen ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla matriisi, jolle ne kuuluvat. Neljäs tehtävä on samantyyppinen, sillä siinä annettujen ominaisarvojen ja ehdon, ettei yksikään alkio saa olla nolla, avulla selvitetään 2×2 -matriisi. Viimeinen tehtävä on todistustehtävä ja sen on tarkoitus haastaa opiskelijoita hieman abstraktimpaan ajatteluun alun mekaanisten tehtävien jälkeen. Tehtävässä todistetaan kolme väitettä, joista kahden kohdalla annetaan vihje käyttää induktiotodistusta.

Lopputestissä on kolme tehtävää ja ne ovat varsin mekaanisia laskuja. Niissä selvitetään annettujen ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla alkuperäinen matriisin, jonka koko on 2×2. Lisäksi lasketaan 3×3 -matriisin ominaisarvot ja selvitetään yhtä vastaava vektori. Viimeisessä tehtävässä selvitetään matriisin karakteristinen polynomi sekä ominaisarvot.

5.3.12 Loput moduulit ja EXAM-kokeet

Edellä esiteltyjen moduulien (kappaleet 5.3.2-5.3.5 ja 5.3.7-5.3.11) lisäksi Siltakurssiin kuuluvat moduulit nimeltä Sarjateoria ja Differentiaaliyhtälöt.

Toisessa EXAM kokeessa testataan matriisilaskentaan liittyvien aiheiden osaamista. Moduuleista tähän kokeeseen kuuluvat Lineaariset yhtälöryhmät, Matriisit, Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste, Determinantit sekä Ominaisarvot- ja vektorit. Kokeessa olisi tärkeää testata muutamien matriisioperaatioiden hallinnan lisäksi jotain ominaisarvoihin liittyvää. Yksi tai kaksi tehtävää voisi olla soveltavia tehtäviä, joista ainakin toisen olisi syytä olla todistustehtävä. Mekaanisia laskutehtäviä voi kokeessa laskea Matlabilla ja niitä on harjoiteltu jo AMK-opintojen aikana.

Sarjateoria-moduulin tavoitteena on lisätä opiskelijan hallintaa erilaisten sarjojen ja niiden suppenemisen tutkinnan osalta. Differentiaaliyhtälöiden kohdalla opiskelijan tulisi oppia lisää erilaisista lineaariyhtälöistä. Sisältövertailun perusteella huomattiin, että TAMK:ssa käsitellään joitakin asioita differentiaaliyhtälöistä, mutta väleistä puuttuu monia aiheita, jotka TTY:lla kuuluvat opintojakson sisältöön. Kolmas EXAM-koe testaa näiden asioiden hallintaa.

6. YHTEENVETO

Diplomityössä tutkittiin TAMK:n ja TTY:n kaikille yhteisten matematiikan opintojaksojen sisältöeroja sekä tarkasteltiin opintomenestystä Insinöörimatematiikan opintojaksoilla. Esille nostettiin niitä kohtia, joihin TTY:lle AMK-tutkinnon perusteella tulevien opiskelijoiden kohdalla on erityistä syytä kiinnittää huomiota. AMK-insinöörien matematiikan taitojen saattamiseksi TTY:n tekniikan kandidaattien tasolle on suunniteltu Siltakurssi, jolla käsitellään diplomi-insinöörille tärkeitä matematiikan perusasioita. Siltakurssilla käytetyt menetelmät on perusteltu opetuksen teorian avulla.

6.1 Sisältöerot matematiikan opintojaksoilla

TAMK:n ja TTY:n matematiikan oppisisältöjen suurimpia eroja ovat käsittelyn täsmällisyys ja laajuus, mutta myös tulosten perusteluissa on eroja. TAMK:ssa on kaikille yhteisiä matematiikan opintojaksoja 12 op, kun taas TTY:ssa kaikki opiskelevat vähintään 27 op matematiikkaa. TTY:n matematiikan opinnoista 15 op on osaamistavoitteiltaan kaikille samoja opintoja ja niihin on tutustuttu tässä tutkimuksessa tarkemmin. Eräs keskeisimpiä eroavaisuuksia matematiikan opiskelussa on, että TTY:ssa pyritään mahdollisuuksien mukaan loogisesti perustelemaan käytettävät tulokset, mutta TAMK:n materiaaleissa perusteluita on vähemmän. Toisena merkittävänä erona on, että TAMK:n puolella paneudutaan symbolisen CAS-laskimen käyttöön tarkasti ja sitä hyödynnetään tehtävissä laajasti, kun taas TTY:ssa matematiikassa ei käytetä laskinta, vaan tutustutaan Matlab-ohjelmiston käyttöön.

Kun verrataan TTY:n ja TAMK:n opintopisteiden jakautumista eri opintojaksoille, voidaan todeta, että TAMK:n 12 opintopisteen matematiikan opinnot kattavat lähes kokonaan TTY:ssa järjestettävän Johdatus yliopistomatematiikkaan -opintojakson (8 op) ja suurelta osin myös Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson (5 op) (kts. taulukko C.2). Insinöörimatematiikka 2 ja 3 -opintojaksojen aiheista TAMK:ssa opiskellaan osa.

6.2 Opintomenestys Insinöörimatematiikassa

Tutkimuksessa verrattiin ensimmäisen vuoden opiskelijoiden ja suoraan maisterivaiheeseen tulleiden kaikkien opiskelijoiden sekä AMK-insinöörien Insinöörimatematiikka 1, 2 ja 3 -opintojaksoista saamien arvosanojen keskiarvoja. Aineistoon kuuluivat vuosien 2010 ja 2014 välillä opintonsa TTY:ssa aloittaneet opiskelijat. Testauksessa käytettiin Matlabin ttest2-funktiota ja yksipuolista t-testiä. Luottamusväliksi valittiin 95 %.

Näiden opiskelijaryhmien keskiarvot Insinöörimatematiikka 1-3 -opintojaksoista olivat arvosanojen 2 ja 3 välillä. Vaihtelu ei siis ole suurta, mikä on hyvä asia. Suurimmat erot keskiarvoissa olivat Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla, jolla ensimmäisen vuoden opiskelijoiden arvosanojen keskiarvo oli 2,90 ($n = 2715$), kun taas suoraan maisterivaiheeseen tulleiden oli 2,27 ($n = 207$) ja AMK-insinöörien 2,28 ($n = 74$). Insinöörimatematiikka 2 ja 3 -opintojaksojen osalta keskiarvojen erot olivat pienempiä ensimmäisen vuoden opiskelijoiden keskiarvojen ollessa hieman parempia kuin muiden.

Tilastollisella testauksella tutkittiin, olivatko ensimmäisen vuoden opiskelijoiden saamien arvosanojen keskiarvot parempia kuin suoraan maisterivaiheeseen tulleiden ja AMK-insinöörien. Testauksesta jätettiin pois ne koulutusohjelmat, joissa aineiston koko jäi alle kymmeneen. Ensimmäisen Insinöörimatematiikan opintojakson kohdalla testaus osoitti, että ensimmäisen vuoden opiskelijat olivat muita tutkittuja ryhmiä parempia, mutta muutaman koulutusohjelman kohdalla p-arvo jäi valittua luottamusväliä suuremmaksi. Insinöörimatematiikka 2 ja 3 -opintojaksojen kohdalla tilastollisesti merkittävää eroa ei ollut havaittavissa pienten aineistojen ja suuriksi jääneiden p-arvojen vuoksi.

Tulosta voidaan selittää sillä, että ensimmäisellä yliopiston matematiikan opintojaksolla käsitellään paljon lukiosta tuttuja aiheita, joiden opiskelusta voi olla suoraan maisterivaiheeseen tulleilla opiskelijoilla jo pidempi aika. Heidän aiemmista opinnoistaankin voi olla jo tovi, jolloin opiskelutavat ja -rytmi voivat olla vielä hukassa. Kun he pääsevät opintojen alkuun, erot häviävät.

6.3 Siltakurssin perusteet

Siltakurssi on suunniteltu sisältövertailussa esille tulleiden erojen pohjalta ja sen tavoitteena on täydentää AMK-insinöörien osaaminen tekniikan kandidaatin tasolle. Opintojaksolle on valittu sellaisia aiheita, jotka ovat tärkeitä maisterivaiheen muiden matematiikan opintojen etenemisen kannalta. Siltakurssi (7 op) toteutetaan monimuoto-opetuksena. Verkko-oppimisympäristönä käytetään Moodlea, mutta opintojaksolla on tarkoitus pitää myös viikkoharjoituksia, joissa voi tehdä harjoitustehtäviä opettajan avustuksella.

Siltakurssi koostuu moduuleista, joihin kuuluu flipped classroom -periaatteiden mukaan ennen harjoituksia katsottavia videoita ja teoriamateriaalia, harjoitustehtävät, joita voi tehdä itsenäisesti ja harjoituksissa, sekä lopputesti, joka koostuu Moodlessa olevista sähköisistä Stack-tehtävistä. Moduulit on jaettu kolmeen EXAM-kokeeseen, jotka ovat sähköisessä tenttijärjestelmässä tehtäviä tenttejä. Kun kaikkien moduulien lopputestit ja EXAM-kokeet on suoritettu hyväksytysti, opintojaksosta saa hyväksytty-merkinnän. Lopputestejä voi yrittää äärettömän monta kertaa, mutta EXAM-kokeiden suorituskerrat on rajattu kolmeen.

Verkko-opetuksessa on tärkeää panostaa vuorovaikutukseen, koska tekstipohjainen vuorovaikutus ei juuri sisällä sosiaalisia vihjeitä, kuten ikä, ilmeet ja sukupuoli. Siltakurssilla vuorovaikutusta tapahtuu harjoitustilaisuuksissa kasvokkain, jolloin paine verkko-oppimisympäristön välityksellä tapahtuvaan vuorovaikutukseen on pienempi. Moodleen on kuitenkin luotu keskustelualue, jolla opiskelijat voivat esittää kysymyksiä tai keskustella opintojakson aiheesta. Opettajan on syytä aika ajoin viritellä keskustelua, jos sitä ei synny itsestään.

Flipped classroom -menetelmässä pyritään maksimoimaan opettajan ja opiskelijoiden vuorovaikutus tapaamiskerroilla siten, että opiskelijat tutustuvat aiheeseen jo etukäteen videoiden ja muun materiaalin avulla. Tällä tavoin toimien yhteistä aikaa ei tarvitse käyttää yksipuoliseen viestintään opettajan luennoidessa. Siltakurssilla pyritään samaan. Moodleen on koottu jokaisen moduulin kohdalle aiheeseen sopivia videoita. TTY:n omista kokoelmista löytyi muutamia ja loput on etsitty internetistä, kuten Khan Academysta.

Matematiikka rakentuu edellisen päälle ja uuden tiedon oppiminen vaatii vanhan tiedon kertaamista ja aktiivista työskentelyä uuden aiheen parissa. Matematiikassa tämä hoidetaan yleensä erilaisin harjoitustehtävin. Myös Siltakurssin moduulit sisältävät harjoitustehtäviä, joiden avulla aiheen osaaminen syvenee. Konstruktivismin ajatus tiedon rakentamisesta ja muokkaamisesta sopivaksi omiin jo olemassa oleviin esiymmärryksiin sopii matematiikkaan hyvin.

Yrjönsuuren SOLO-mallin sovellusta käytetään EXAM-kokeiden arvostelussa. Mallissa tieto luokitellaan sen syvyyden mukaan viidelle eri tasolle, jotka ovat rakenteeton, yksirakenteinen ja monirakenteinen tieto sekä konkreettisten yleistysten tietämisen ja abstraktin ajattelun käyttämisen taso. Näistä tasoista kahdelle ylimmälle päästään vain laajojen ja avointen ongelmien kautta ja näitä tasoja on vaikea testata rajallisessa koeajassa. Ainostaan joillakin todistustehtävillä voidaan yltää neljännelle tasolle.

6.4 Jatkokysymykset

Siltakurssi on suunniteltu TAMK:n matematiikan opintojen pohjalta, mutta TTY:lle tulee opiskelijoita myös muista ammattikorkeakouluista, joten myös niiden opetukseen ja sisältöihin olisi hyvä tutustua tarkemmin. Suoraan maisterivaiheeseen voi tulla opiskelemaan myös muulla kuin AMK-insinöörin tutkinnolla ja myös heille olisi hyvä tarjota jotain matematiikan kertausta. Tämä ryhmä on kuitenkin hyvin heterogeeninen ja heidän aiemmat matematiikan opintonsa voivat olla hyvin erilaisia. Heidän kohdallaan lähtötasotesti voisi olla järkevä tapa kartoittaa osaamistasoa, jotta opiskelija osattaisiin ohjata sopiville opintojaksoille.

Siltakurssin harjoitustehtävät on koottu Matematiikan laitoksen valmiista tehtävistä ja videot valittu internetissä valmiiksi olevien ja laitoksella aiemmin tehtyjen joukosta. Harjoitustehtävät ovat suurelta osin mekaanisia ja niiden monipuolistaminen voi olla tarpeen. Erityisesti soveltavia tehtäviä voisi olla enemmän. Internetistä löydetyt videot ovat pääasiassa englanninkielisiä, mikä voi tuottaa ongelmia joillekin opiskelijoille. Voikin olla hyödyllistä tehdä joitakin suomenkielisiä videoita niistä aiheista, jotka osoittautuvat erityisen vaikeiksi opiskelijoille. EXAM-kokeiden suunnittelussa voisi huomioida vielä enemmän sen, että kokeessa on mahdollista käyttää Matlabia.

Opintomenestyksen tutkimisen luotettavaan tilastolliseen testaamiseen tarvittaisiin suurempi aineisto. Erityisesti AMK-insinöörien joukko jää koulutusohjelmittain tarkasteltaessa liian pieneksi. AMK-taustaisia opiskelijoita tulee TTY:lle vuosittain luultavasti tilastoitua enemmän, koska aineistossa on paljon opiskelijoita, joiden valintaperusteeksi on kirjattu 'muu valintaperuste'. Jos vastaavaa vertailua tehdään jatkossa, tulisi opiskelijarekisteriin kirjata tarkemmin opiskelijan valintaperuste.

Tutkimus onnistui tavoitteissaan hyvin. Tutkimuksessa tehdyn sisältövertailun perusteella voidaan sanoa, että Siltakurssille on tarvetta TTY:ssa, jotta AMK-insinöörien osaaminen saadaan samalle tasolle kuin tekniikan kandidaateilla ja jotta käytäntö olisi tasapuolinen kaikkien koulutusohjelmien opiskelijoille.

LÄHTEET

[1] AHOT korkeakouluissa -hanke. Tekniikan työryhmän suositukset tekniikan alalle aiemmin hankitun osaamisen tunnistamisesta ja tunnustamisesta. [Viitattu 27.10.2015] Saatavissa: `http://www.tunnistaosaaminen.fi/node/31`

[2] Bergmann, J. ja Sams, A. 2012. *Flip your classroom: Reach every student in every class every day.* International Society for Technology in Education.

[3] Biggs, J. ja Collis, K. F. 1982. *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy.* New York: Academis Press.

[4] MAT-02600 Diskreetti matematiikka -opintojakson internet-sivut. [Viitattu 13.7.2015]. Saatavissa `http://math.tut.fi/courses/dima/`

[5] Edwards, C. H. 2002. *Calculus, 6e, Early Transcendentals, Matrix Version.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

[6] The European Society for Engineering Education. 2013. *A Framework for Mathematics Curricula in Engineeging Education.* A Report of the Mathematics Working Group. [Viitattu 11.9.2015]. Saatavissa: `http://www.sefi.be/wp-content/uploads/Competency%20based%20curriculum%20incl%20ads.pdf`

[7] The European Society for Engineering Education -järjestön internet-sivut. [Viitattu 3.12.2015]. Saatavissa `http://www.sefi.be/`

[8] EXAM-järjestelmän internet-sivut. [Viitattu 22.2.2016] Saatavissa `https://confluence.csc.fi/display/EXAM/EXAM`

[9] Heikkilä, M., Negvi, A. ja Haarala-Muhonen, A. 2005. Verkko-opetuksen laatutyö. Teoksessa Nevgi, A., Löfström, E. ja Evälä, A. (toim.) *Laadukkaasti verkossa. Yliopistollisen verkko-opetuksen ulottuvuudet.* Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Yliopistopaino.

[10] Hirsjärvi, H. 1983. *Kasvatustieteen käsitteistö.* Helsinki: Otava.

[11] Holopainen, M. ja Pulkkinen, P. 2013. *Tilastolliset menetelmät.* Helsinki: Sanoma Pro.

[12] Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta ja O. Marttila (toim.) *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium* Vol. 7, No. 2003, s. 188-196.

[13] Kaarakka, T. 2014. *IMAB1.* Insinöörimatematiikka B1 -opintojakson moniste. Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos.

[14] Kaarakka, T. ja Orelma, H. 2014. *Matriisilaskentaa insinöörien tarpeisiin.* Opintomoniste. Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos.

[15] Kaarakka, T. 2014. *Insinöörimatematiikka B3.* Opintomoniste. Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos.

[16] Khan Academy. [Viitattu 15.12.2015] Saatavissa: `https://www.khanacademy.org/`

[17] Khan, S. 2012. *The one world schoolhouse: Education reimagined.* USA: Twelve.

[18] Karjalainen, L. 2004. *Tilastomatematiikka.* Mikkeli: Pii-Kirjat.

[19] Kauhanen, J. 2014. *Insinöörimatematiikka 1, Periodi 1/2014-2015.* Opintomoniste. TTY, Matematiikan laitos.

[20] Kauhanen, J. 2014. *Insinöörimatematiikka 3, 2014-2015.* Opintomoniste. TTY, Matematiikan laitos.

[21] Laaksonen, M. 2014. *MAT-02450 Fourier'n menetelmät.* Opintomoniste. TTY.

[22] Leino, J. 1993. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa Leino, J., Paasonen, J. ja Pehkonen, E. (toim.) *Matematiikan opetus ja konstruktivismi - teoriaa ja käytäntöä.* Helsingin yliopiston opettajan koulutuslaitos. Tutkimuksia 116. Helsinki: Yliopistopaino.

[23] MathWorksin kotisivu. Dokumentaatio Matlabin ttest2-funktiosta. [Viitattu 12.2.2016] Saatavissa: `http://se.mathworks.com/help/stats/ttest2.html`

[24] Mäkelä, T. *Insinöörin diskreetti matematiikka.* Opintomoniste. [Viitattu 13.7.2015] Saatavissa: `https://sites.google.com/site/tjmakela/`

[25] Mäkelä, T. *Insinöörin perusalgebra.* Opintomoniste. [Viitattu 15.6.2015] Saatavissa: `https://sites.google.com/site/tjmakela/matematiikka`

[26] Mäkelä, T. *Insinöörin perusanalyysi.* Opintomoniste. [Viitattu 15.6.2015] Saatavissa: `https://sites.google.com/site/tjmakela/matematiikka`

[27] Mäkelä, T. *Insinöörin perusgeometria.* Opintomoniste. [Viitattu 15.6.2015] Saatavissa: `https://sites.google.com/site/tjmakela/matematiikka`

[28] Mäkelä, T. *Insinöörin perusmatematiikka 2.* Opintomoniste. [Viitattu 15.6.2015] Saatavissa: `https://sites.google.com/site/tjmakela/matematiikka`

[29] Nevgi, A. ja Heikkilä, M. 2005. Yliopistollinen verkko-opetus. Teoksessa Nevgi, A., Löfström, E. ja Evälä, A. (toim.) *Laadukkaasti verkossa. Yliopistollisen verkko-opetuksen ulottuvuudet.* Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Yliopistopaino.

[30] Nokelainen, L. ja Sointu, L. 2003. Oppimista ja opiskelua ohjaavat materiaalit. Teoksessa Matikainen, J. (toim.) *Oppimisen ohjaus verkossa.* Helsinki: Yliopistopaino

[31] Perttula, A., Vattulainen, K. ja Suurhasko, T. Versio 9/2012. *Todennäköisyyslaskenta.* Opintomoniste. TTY.

[32] Pohjolainen, S. 2005. *AMK-matematiikat TTY:ssä.* Raportti.

[33] Pohjolainen, S., Ylinen, A. ja Takala, J. 2014. *Perusopinnoista suoriutuminen lukuvuonna 2012-2013.* Perusopintojen nopeuttaminen -työryhmän raportti. TTY.

[34] Poole, D. 2003. *Linear Algebra, A Modern Introduction.* USA: Thomson.

[35] Rahkola, M. 2016. *AMK-insinöörien aiemmat matematiikan opinnot siirryttäessä TTY:lle maisterivaiheeseen.* Raportti.

[36] Ruohonen, K. 2011. *Tilastomatematiikka.* Opintomoniste. TTY.

[37] Simulinkin kotisivu. [Viitattu 17.8.2015] Saatavissa: `http://se.mathworks.com/products/simulink/`

[38] Takala, S. 1997. Vieraan kielen kehittymisen arvointiperusteita. Teoksessa Jakku-Sihvonen, R. (toim.) *Onnistuuko oppiminen - oppimistuloksien ja opetuksen laadun arviointiperusteita peruskoulussa ja lukiossa.* Opetushallitus. Arviointi 3/1997.

[39] Tampereen ammattikorkeakoulun opinto-opas. [Viitattu 17.6.2015] Saatavissa: http://opinto-opas-ops.tamk.fi/index.php/fi/167/fi

[40] Tampereen teknillisen yliopiston AHOT-ohjeet. Opintojen hyväksiluvun ja aiemmin hankitun osaamisen tunnustamisen (AHOT) käsitteet ja periaatteet TTY:n perus- ja jatkotutkinnoissa. Hyväksytty konsistorissa 26.1.2015.

[41] Tampereen teknillisen yliopiston opinto-opas. [Viitattu 3.6.2015] Saatavissa: http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2014-2015/perus/tutkinnot/

[42] Uusikylä, K. ja Atjonen, P. 2005. *Didaktiikan perusteet.* WSOY.

[43] Welch, B. L. 1947. *The Generalization of Student's' Problem when Several Different Population Variances are Involved.* Biometrika, 34(1/2), 28-35. [Viitattu 12.2.2016] Saatavissa: http://www.jstor.org/stable/2332510

[44] YoL 24.7.2009/558. Yliopistolaki. Valtion säädöstietopankki Finlex. [Viitattu 12.2.2016] Saatavissa: http://www.finlex.fi

[45] Youtube-videopalvelu. [Viitattu 15.12.2015] Saatavissa: https://www.youtube.com/results?search_query=khan+academy

[46] Yrjönsuuri, R. 1997. Matemaattisen ajattelun kehittymisen arviointiperusteita. Teoksessa Jakku-Sihvonen, R. (toim.) *Onnistuuko oppiminen - oppimistuloksien ja opetuksen laadun arviointiperusteita peruskoulussa ja lukiossa.* Opetushallitus. Arviointi 3/1997.

A. KOULUTUSOHJELMAKOHTAISET OPINTOJAKSOT

Tekniikan kandidaatin opinnot (opinto-opas 2014-2015)

Koulutusohjelma	IMA/MAT1	IMA/MAT2	IMA/MAT3	IMA/MAT4	Todennäköisyyslaskenta	Algoritmimatematiikka	Vektorianalyysi	Fourier'n menetelmät	Operaatiotutkimus	Tilastomatematiikka	Diskreettimatematiikka *	Montako vaihtoehtoista opintojaksoa?	Opintopisteet yhteensä
Automaatiotekniikka	P1	P1	P1	P1				P2				0	23
Biotekniikka	P1	P1	P1	P1	V2	V2	V2	V2	V2	V2	V2	2	27
Konetekniikka	P1	P1	P1	P1			P2					0	23
Materiaalitekniikka	P1	P1	P1	P1		V2	V2	V2	V2	V2	V2	1	23
Rakennustekniikka	P1	P1	P1	P1								0	19
Sähkötekniikka	P1	P1	P1	V1	V2	V1	V2	V2		V2	V2	2	23
Teknis-luonnontieteellinen	P1	P1	P1	P1	V2	V2	V2	V2	V2	V2	V2	2	27
Tietojohtaminen	P1	P1	P1	V1	P2	V1			P2	V2		1	27
Tietotekniikka	P1	P1	P1	V1	V2	V1	V2	V2		V2	V2	2	23
Tuotantotalous	P1	P1	P1	V1	P2	V1			P2	V2		1	27
Ympäristö- ja energiatekniikka	P1	P1	P1	P1	V2	V2	V2	V2	V2	V2	V2	2	27
	"Ensimmäisen vuoden opintojaksot"				"Toisen vuoden opintojaksot"								
Opintojakson opintopisteet	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4		

PX Pakollinen opintojakso, suunniteltu suoritusvuosi X

VX Vaihtoehtoinen opintojakso, suunniteltu suoritusvuosi X

* Opintojakso ei enää tarjolla

Lähde: TTY:n opinto-opas 2014-2015 (http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2014-2015/perus/tutkinnot/), viitattu 3.6.2015

Diplomi-insinöörin opinnot (opinto-opas 2014-2015)

Koulutusohjelma	Todennäköisyyslaskenta	Algoritmimatematiikka	Vektorianalyysi	Fourier'n menetelmät	Operaatiotutkimus	Tilastomatematiikka	Diskreettimatematiikka *	Matriisilaskenta	Kompleksimuuttujan funktiot	Differentiaaliyhtälöt	Montako vaihtoehtoista opintojaksoa?	Opintopisteet yhteensä	Opintopisteet yhteensä
Automaatiotekniikka	V4	V4				V4		V4	V4		1	4-5	27-28
Biotekniikka													
Konetekniikka	P4					V4		V4		V4	1	4-5	27-28
Materiaalitekniikka	P4											4	27
Rakennustekniikka	P4					P4					0	8	27
Sähkötekniikka	V4		V4	V4		V4					1	4	27
Teknis-luonnontieteellinen													
Tietojohtaminen													
Tietotekniikka	V4	V4		V4		V4	V4				1	4	27
Tuotantotalous													
Ympäristö- ja energiatekniikka													
	"Toisen vuoden opintojaksot"												
Opintojakson opintopisteet	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5			

PX Pakollinen opintojakso, suunniteltu suoritusvuosi X

VX Vaihtoehtoinen opintojakso, suunniteltu suoritusvuosi X

* Opintojakso ei enää tarjolla

Lähde: TTY:n opinto-opas 2014-2015 (http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2014-2015/perus/tutkinnot/), viitattu 3.6.2015

B. TÄYDENTÄVIEN OPINTOJEN SISÄLTÖ

Täydentävät opinnot AMK-insinööreille

Koulutusohjelma	IMA/MAT1	IMA/MAT2	IMA/MAT3	IMA/MAT4	Todennäköisyyslaskenta	Algoritmimatematiikka	Vektorianalyysi	Fourier'n menetelmät	Operaatiotutkimus	Tilastomatematiikka	Diskreettimatematiikka *	Montako vaihtoehtoista opintojaksoa?	Opintopisteet yhteensä
Automaatiotekniikka	P	P	P	P				P				0	23
Biotekniikka	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	2	27
Konetekniikka	P	P	P	P			P					0	23
Materiaalitekniikka	P	P	P	P		V	V	V	V	V		1	23
Rakennustekniikka	P	P	P(10-12)	P(10-12)								0	10
Sähkötekniikka	P(10-12)	P(10-12)	P(10-12)	P(10-12)	V		V	V				1	4
Teknis-luonnontieteellinen	Ei AMK-insinöörien sisäänottoa												
Tietojohtaminen													
Tietotekniikka					V	V		V		V		1	4
Tuotantotalous	Määritellään henkilökohtaisesti												
Ympäristö- ja energiatekniikka	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	2	27
	"Ensimmäisen vuoden opintojaksot"				"Toisen vuoden opintojaksot"								
Opintojakson opintopisteet	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4		

P Pakollinen opintojakso

V Vaihtoehtoinen opintojakso

* Opintojakso ei enää tarjolla

(10-12) Opintojakso ollut pakollinen lukuvuosina 2010-2011, 2011-2012 ja 2012-2013

Lähde: Opintosuunnittelijat ja POP-opiskelijaportaali (https://pop-portal.tut.fi/portal/page/portal/POP-portaali/30Opiskelu_fi/15opintojen-suunnittelu/15tutkintovaatimukset), viitattu 16.12.2015

C. TTY:N JA TAMK:N OPINTOJAKSOJEN YHTÄLÄISYYDET JA EROT

Taulukossa C.1 on eritelty TTY:n ja TAMK:n opintojaksojen sisältöjä sekä verrattu eri aiheista saatavien opintopisteiden määriä. Aiheet on jaettu 0,25 opintopisteen tai sitä suurempiin osiin. Yhden aiheen kohdalla päällekkäin olevien erivärististen laatikoiden sisältö on sama. Laatikon koko kertoo sisällöstä saatavan opintopistemäärän. Taulukon C.3 numeroiden perusteella voi tarkistaa laatikon tarkan sisällön liitteen lopussa olevasta listauksesta. Siihen on koottu myös tieto siitä, minkä otsikon alta sisältöjä löytyy SEFI:n julkaisusta [6].

Taulukkoon C.2 on koottu opintojaksoittain TTY:n ja TAMK:n opintopisteiden jakautuminen opintojaksojen kesken. Sarake ja rivi 'Muuta' kertoo opintopistemäärän, jota kyseisen opintojakson kohdalla ei toisessa oppilaitoksessa käsitellä. Taulukko on tehty noudattaen TTY:n opintopistemääriä ja siksi sarakkeen summa ei välttämättä vastaa opintojaksosta saatavaa opintopistemäärää.

Taulukko C.1 *TTY:n ja TAMK:n kaikille yhteisten opintojaksojen yhtäläisyydet ja erot.*

Aihe	Core Zero							Core Level 1							Level 2						
	1/4op 1/2 op		1 op																		
Yhtälöt ja yhtälöryhmät	VALM	VALM		JYM VALM	JYM VALM	JYM		IMA 2 F&M	IMA 2 F&M	IMA 2 F&M	IMA 2	IMA 2		IMA 2	IMA 2						
Joukko-oppi, logiikka ja kompleksiluvut	IMA 1 JYM					IMA 1 JYM G&V	IMA 1 G&V	IMA 1 JYM		IMA 1	IMA 1		IMA 1 G&V	IMA 1	TTY	JYM Johdatus yliopistomatematiikkaan IMA 1 Insinöörimatematiikka 1 IMA 2 Insinöörimatematiikka 2 IMA 3 Insinöörimatematiikka 3					
Funktio-oppi ja alkeisfunktiot	IMA 1 JYM F&M	IMA 1 JYM F&M						IMA 1 JYM F&M	IMA 1 F&M						TAMK	VALM Insinöörimatematiikan valmentavat opinnot G&V Geometria ja vektorilaskenta F&M Funktiot ja matriisit DIFF Differentiaalilaskenta INT Integraalilaskenta					
Trigonometriset funktiot ja vektorit	JYM F&M				VALM G&V		G&V	IMA 2 JYM G&V		IMA 2 JYM G&V		IMA 2 G&V	IMA 2								
Derivaatta ja differentiaaliyhtälöt	IMA 1 JYM DIFF		IMA 1 JYM DIFF				IMA 1 DIFF	IMA 1 JYM DIFF							IMA 3 INT	IMA 3 INT	IMA 3 INT	INT	IMA 3	IMA 3	IMA 3
Integraali	IMA 3 JYM INT			IMA 3 JYM INT				IMA 3 JYM INT	IMA 3 INT	IMA 3 INT	IMA 3										
Sarjat	IMA 3 JYM DIFF							IMA 3 JYM DIFF	IMA 3 DIFF		IMA 3										

Taulukko C.2 *Opintojaksoista saatavien opintopisteiden jakautuminen eri opintojaksoille ja kuinka paljon opintopisteitä jää saamatta. Taulukon opintopisteet on laskettu noudattaen TTY:n opintopistemääriä.*

OP	VALM (3 op)	G&V (3 op)	F&M (3 op)	DIFF (3 op)	INT (3 op)	Muuta
Muuta	2,25	1,00	-	-	0,25	
JYM (8 op)	0,50	1,00	1,75	2,25	1,25	1,25
IMA 1 (5 op)	-	0,75	1,00	2,00	-	1,25
IMA 2 (5 op)	-	0,75	1,25	-	-	3,00
IMA 3 (5 op)	-	-	-	1,00	2,00	2,00

Taulukko C.3 *Taulukon C.1 lokeroiden sisältöä vastaavat numerot.*

Aihe	Core Zero							Core Level 1							Level 2						
Yhtälöt ja yhtälöryhmät	1	2		3	4	5		6	7	8	9	10		11	12						
Joukko-oppi, logiikka ja kompleksiluvut	13					14	15	16		17	18		19	20							
Funktio-oppi ja alkeisfunktiot	21	22						23	24												
Trigonometriset funktiot ja vektorit	25				26		27	28		29		30	31								
Derivaatta ja differentiaaliyhtälöt	32		33				34	35							36	37	38	39	40	41	42
Integraali	43			44				45	46	47	48										
Sarjat	49							50	51		52										

Ruutu	Sisältö	SEFI:n luokka, johon sisältö kuuluu
Yhtälöt ja yhtälöryhmät		
1	Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt, juuriyhtälöt, yhtälöpari	Algebra: Algebraic expressions and formulae
2	Potenssit, summa-, tulo- ja rationaalilausekkeet	Algebra: Arithmetic of real numbers
3	Itseisarvo, neliöjuuret, epäyhtälö (JYM) ja yleinen potenssi (VALM)	Algebra: Arithmetic of real numbers ja Algebraic expressions and formulae
4	Perusasioita luvuista	Algebra: Arithmetic of real numbers
5	Paraabeli, ympyrä, ellipsi, hyperbeli	Geometry and Trigonometry: Geometry
6	Lineaarinen neliöllinen yhtälöryhmä (määritelmä, matriisimuoto, matriisin aste, homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä), Cramerin sääntö	Linear Algebra: Solution of simultaneous linear equations
7	Erilaisia matriiseja, peruslaskutoimitukset, transpoosi, laskusääntöjä, käänteismatriisi, yhtälön ratkaisu, R^3:n kanta	Linear Algebra: Matrices and determinants
8	n*n-determinantti, ylä- ja alakolmiomatriisin determinantti, tulon determinantti	Linear Algebra: Matrices and determinants
9	Määritelmä, ekvivalentit yhtälöryhmät, matriisimuoto, matriisin aste, redusoitu vaakariviporrasmuoto, homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä, Gaussin Jordanin eliminointimenetelmä	Linear Algebra: Solution of simultaneous linear equations
10	Alivaruudet ja niiden dimensiolause, sarake- ja nolla-avaruuden kannan määrääminen, ortogonaalisuus, matriisin aste, kääntyvien matriisien peruslause, pienimmän neliösumman ratkaisu	Linear Algebra: Linear spaces and transformations
11	Vektoreiden virittämä joukko, lineaarinen riippumattomuus, lineaarikuvaus, kommutaattori, käänteismatriisin muodostaminen Gaussin eliminointimenetelmällä, Laplacen laajennuslause, determinantin ominaisuuksia	Linear Algebra: Matrices and determinants
12	Matriisin ominaisarvot ja -vektorit	Linear Algebra: Eigenvalue problems
Joukko-oppi, logiikka ja kompleksiluvut		
13	Joukot	Discrete Mathematics: Sets
14	Peruslaskutoimitukset	Analysis and Calculus: Complex numbers
15	Esitysmuodot	Analysis and Calculus: Complex numbers
16	Loogiset lauseet ja konnektiivit, totuustaulut, tautologia	Discrete Mathematics: Sets
17	Predikaattilogiikkaa	Discrete Mathematics: Sets
18	Äärellisten joukkojen mahtavuus, n-jono, karteesinen tulo, relaatio	Discrete Mathematics: Sets
19	De Moivren ja Eulerin kaavat	Analysis and Calculus: Complex numbers
20	Kompleksinen juuri ja polynomi	Analysis and Calculus: Complex numbers
Funktio-oppi ja alkeisfunktiot		
21	Funktion määritelmä ja käsitteitä, käänteisfunktio, yhdistetty funktio, kasvavuus, vähenevyys	Analysis and Calculus: Functions and their inverses
22	Potenssi- ja juurifunktiot, trigonometriset funktiot (vain IMA 1), eksponentti ja logaritmifunktiot	Analysis and Calculus: Functions and their inverses, Geometry and Trigonometry: Trigonometry, Analysis and Calculus: Logarithmic and exponential functions
23	Polynomi- ja rationaalifunktiot	Analysis and Calculus: Rational functions
24	Reaalifunktio, hyperboliset funktiot ja areafunktiot	Analysis and Calculus: Hyberbolic functions
Trigonometriset funktiot ja vektorit		
25	Trigonometriset funktiot ja arkusfunktiot, sini- ja kosinilause	Geometry and Trigonometry: Trigonometry
26	Suorakulmainen kolmio, trigonometriset funktiot	Geometry and Trigonometry: Geometry ja Trigonometry
27	Vinokulmainen kolmio	Geometry and Trigonometry: Geometry ja Trigonometry
28	Vektorin perusominaisuudet ja laskutoimitukset	Linear Algebra: Vector arithmetic ja Vector algebra and applications
29	Pistetulo, vektorin normi, vektoreiden välinen kulma	Linear Algebra: Vector arithmetic ja Vector algebra and applications
30	Ristitulo, Cauchy-Schwarzin epäyhtälö, kolmioepäyhtälö, ortogonaalisuus, projektio, determinantti	Linear Algebra: Vector arithmetic ja Vector algebra and applications
31	Avaruus ja kanta, lineaarikombinaatio, vektoreiden välinen etäisyys, metriikan ehdot, normaalivektori, suoran ja tason yhtälöt	Linear Algebra: Vector arithmetic ja Vector algebra and applications

Derivaatta ja differentiaaliyhtälöt		
32	Raja-arvo, toispuoleinen ja epäoleellinen raja-arvo, raja-arvo äärettömyydessä	Analysis and Calculus: Functions and their inverses
33	Erotusosamäärä, tangenttisuora, derivoinnin perussäännöt, ketjusääntö, ääriarvot	Analysis and Calculus: Rates of change and differentiation ja Stationary points, maximum and minimum values
34	l'Hospital	Analysis and Calculus: Rates of change and differentiation
35	Jatkuvuus, Boltzanon lause	Analysis and Calculus: Differentiation
36	Määritelmä, alkuarvoprobleema	Analysis and Calculus: Ordinary differential equations
37	Separoituva diff.yhtälö, Eulerin menetelmä, yleinen lineaarinen diff.yht.	Analysis and Calculus: First order ordinary differential equations
38	Wronskin determinantti, 2. kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö, karakteristinen yhtälö, epähomogeeninen yhtälö	Analysis and Calculus: Second order equations - complementary function and particular integral
39	Sovelluksia: geometrisia, fysikaalisia, mekaniikan ja piirianalyysin	Analysis and Calculus: First order ordinary differential equations
40	Normaaliryhmä: pienen normaaliryhmän palauttaminen differentiaaliyhtälöksi, yhtälöiden muokkaaminen normaaliryhmäksi, normaaliryhmän ratkaiseminen Matlabilla	Analysis and Calculus: First order ordinary differential equations
41	Korkeamman kertaluvun lineaariyhtälö, 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö ja lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö	Analysis and Calculus: Second order equations - complementary function and particular integral
42	1.kl:n lineaariyhtälö, suuntaelementtikenttä	Analysis and Calculus: First order ordinary differential equations
Integraali		
43	Integraalin määritelmä, peruskaavoja ja -sääntöjä	Analysis and Calculus: Indefinite integration
44	Geometrisia sovelluksia	Analysis and Calculus: Definite integration, applications to areas and volumes
45	Määrätty integraali: Riemannin summa, määrätyn integraalin ominaisuuksia, integraalilaskennan väliarvolause, analyysin peruslause	Analysis and Calculus: Definite integration, applications to areas and volumes
46	Numeerinen integrointi	Analysis and Calculus: Methods of integration ja Applications of integration
47	Epäoleellinen integraali: rajoittamaton integrointiväli, rajoittamaton funktio, majorantti- ja minoranttiperiaate	Analysis and Calculus: Methods of integration ja Applications of integration
48	Osittaisintegrointi, integrointi sijoituksen avulla, osamurtokehitelmä	Analysis and Calculus: Indefinite integration
Sarjat		
49	Lukujonon ja sarjan määritelmät	Analysis and Calculus: Sequences, series, binomial expansions
50	Sarjojen perusominaisuuksia, geometrinen sarja ja summa	Analysis and Calculus: Sequences and series
51	Suppenevien sarjojen ominaisuuksia, itseinen suppeneminen, suhdetesti, Taylorin sarja ja polynomi, sarjakehitelmiä	Analysis and Calculus: Sequences and series
52	Potenssisarja ja sen suppeneminen, derivoituva ja integroituva sarja, positiiviterminen, harmoninen ja vuorotteleva sarja, integraali- ja suhdetesti sekä Leibnizin testi	Analysis and Calculus: Sequences and series

D. ENSIMMÄINEN EXAM-KOE

EXAM 1

Perustele ratkaisusi välivaiheineen huolellisesti, pelkkä vastaus ei tuota täysiä pisteitä. Jokaisesta tehtävästä on mahdollista saada kuusi pistettä.

1. a) Laske $\cos\frac{7\pi}{6}$ tarkka arvo hyödyntäen kosinin summakaavaa

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

   b) Kompleksiluvun z eräs kolmas juuri on $w_1 = 1 + i\sqrt{3}$. Selvitä luvun muut kolmannet juuret ja alkuperäinen luku z sekä esitä ne muodossa $x + iy$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Todista induktiolla, että $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. a) Laske raja-arvo $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3-1}$.

   b) Osoita, että funktio $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ on derivoituva koko reaalilukujen joukossa ja laske derivaattafunktio $f'(x)$ käyttäen erotusosamäärän raja-arvoa $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

4. Raketti laukaistaan kohtisuoraan ylöspäin paikasta, joka on kaksi kilometriä länteen tarkkailupisteestä. Mikä on raketin nopeus, kun tarkkailija näkee sen kulmassa α (rad) maasta nähden ja kulma kasvaa β radiaania sekunnissa? Piirrä kuva ratkaisuusi.

E. ENSIMMÄISEN KOKEEN MALLIVASTAUKSET JA ARVOSTELUOHJEITA

EXAM 1: Mallivastaukset

1.

a) Laske $\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{7\pi}}{\mathbf{6}}$ tarkka arvo hyödyntäen kosinin summakaavaa $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}$.

Mallivastaus: 3 pistettä

Kulma on jaettu summaksi esimerkiksi näin $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$.

Kulmat on sijoitettu kaavaan $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{2\pi}{3}$.

1 piste, kun kulma on jaettu summaksi

Kulmien arvot on ratkaistu $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1 piste oikeasta vastauksesta

0,5 pistettä ensimmäisestä oikein lasketusta kulmasta ja 0,5 pistettä lisää, jos kaikki on laskettu oikein

Erilaisia vaihtoehtoja:

- Pelkästä vastauksesta 1 piste.
- Pelkästä vastauksen likiarvosta 0 pistettä.
- Seuraavasta $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ saa 2 pistettä.
- Seuraavasta $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ saa 3 pistettä.

b) Kompleksiluvun *z* eräs kolmas juuri on $\boldsymbol{w_1} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$. Selvitä luvun muut kolmannet juuret ja alkuperäinen luku *z* sekä esitä ne muodossa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$, kun $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$.

Mallivastaus: 3 pistettä

Muutetaan w_1 eksponenttimuotoon $w_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} \cdot e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi/3}$.

Lasketaan alkuperäinen luku $z = w_1^3 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = 8e^{i\pi} = -8$.

1 piste, kun z on laskettu oikein

Muut juuret ovat ${}^{2\pi}/_3$:n välein. *1 piste perustelusta*

$w_2 = 2e^{i(\pi/3 + 2\pi/3)} = 2e^{i\pi} = -2$ *0,5 pistettä juuresta*

$w_3 = 2e^{i(\pi/3 + 4\pi/3)} = 2e^{i5\pi/3} = 2\left(\cos{}^{5\pi}/_3 - i\sin{}^{5\pi}/_3\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$ *0,5 pistettä juuresta*

Erilaisia vaihtoehtoja:

- Juurta w_1 ei ole muutettu eksponenttimuotoon, vaan juuret on ratkottu muuten. OK
- Tehtävä on ratkaistu graafisesti perustellen. Mahdollisuus saada 3 pistettä.
- *z* on laskettu seuraavasti: $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8$ → 1 piste

2. Todista induktiolla, että $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$ $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. 6p

Mallivastaus: 6 pistettä

Väite: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Todistus: Alkuaskel: $n = 1$

Yhtälön vasen puoli $\sum_{i=1}^{1} i = 1$

Yhtälön oikea puoli $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ OK! *1 piste*

Induktioaskel:

Induktio-oletus:

Oletetaan, että väite on tosi, kun $n = N$ eli $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$. *1 piste*

Induktioväite:

$\sum_{i=1}^{N+1} i = \frac{(N+1)(N+1+1)}{2}$ *1 piste*

Induktiotodistus: $\sum_{i=1}^{N+1} i = \sum_{i=1}^{N} i + N + 1$ $\quad (induktio - oletus)$ *1 piste perustelusta*

$$= \frac{N(N+1)}{2} + N + 1$$ *1 piste*

$$= \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \quad \square$$ *1 piste*

Induktio-oletuksen avulla osoitettiin, että induktioväite pätee. Eli alkuperäinen väite on tosi.

Erilaisia vaihtoehtoja:

- Opiskelija on edennyt tarkastellen molempia puolia samalla kerralla ja päätyy tilanteeseen 0=0, mutta ei käytä ekvivalenssinuolia. Vähintään -1 piste.
- Jos aihetta epäillä, että opiskelija käyttää väitettä todistaessaan sitä, niin 0 pistettä.
- Opiskelija voi ratkoa myös oikeaa puolta ja päätyä samaan kuin vasemmalta. Tämä on OK.

3.

a) Laske raja-arvo $\mathbf{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}}$.

1 piste, kun huomattu ongelma. Ei tarvitse osata käyttää nimeä l'Hospital

Mallivastaus: 3 pistettä

Raja-arvo on muotoa $''{}^{0}/_{0}''$ ja voidaan käyttää l'Hospitalia.

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{3x^2} = \frac{1}{3}$, koska osoittaja ja nimittäjä ovat jatkuvia ja derivoituvia tarkastelualueella

1 piste, kun osattu derivoida oikein

0,5 pistettä oikeasta vastauksesta ja toiset 0,5 pistettä, jos perusteltu, miksi voidaan vain sijoittaa x = 1

Erilaisia vaihtoehtoja:

- Opiskelija on ratkaissut tehtävän käyttämällä Matlabia. Pelkkä vastaus on 0,5 pistettä.
- Opiskelija on ratkaissut tehtävän sarjakehitelmien avulla. Jos perustelut ovat riittävät, niin mahdollista saada 3 pistettä.

b) Osoita, että funktio $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x + 5}$ on derivoituva koko reaalilukujen joukossa ja laske derivaattafunktio $\boldsymbol{f'(x)}$ käyttäen erotusosamäärän raja-arvoa $\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$.

Mallivastaus: 3 pistettä

Väite: Funktio $f(x)$ on derivoituva koko reaalilukujen joukossa ($\mathbb{R}$).

Todistus: Jos raja-arvo $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ on äärellisenä olemassa, niin $f(x)$ on derivoituva pisteessä x.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2+2(x+h)+5-(3x^2+2x+5)}{h}$$

1 piste, osattu sijoittaa kaavaan

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2+2x+2h+5-3x^2-2x-5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2+2h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(6x+3h+2) = 6x+2$$

1 piste vastauksesta, eli kun huomattu, että h → 0

Raja-arvo on olemassa kaikilla reaaliluvuilla x, joten $f(x)$ on derivoituva koko joukossa $\mathbb{R}$. Nyt kun derivaatta on olemassa, se on $f'(x) = 6x + 2$. □

1 piste perustelusta

Erilaisia vaihtoehtoja:

- Pelkästä vastauksesta 1 piste.
- Ajatus oikein, mutta tekee laskuvirheen. Ei pistettä vastauksesta, mahdollista saada 2 pistettä.

4. Raketti laukaistaan kohtisuoraan ylöspäin paikasta, joka on kaksi kilometriä länteen tarkkailupisteestä. Mikä on raketin nopeus, kun tarkkailija näkee sen kulmassa **α** (rad) maasta nähden ja kulma kasvaa **β** radiaania sekunnissa? Piirrä kuva ratkaisuusi.

Mallivastaus: 6 pistettä

h(t) raketin korkeus ajan hetkellä *t* (yksikkönä sekunti)

α katselukulma

Raketin korkeus on $\mathrm{h(t)} = 2\tan\alpha$ | *1 piste*

1 piste, kun löydetty yhteys nopeuden ja korkeuden välillä

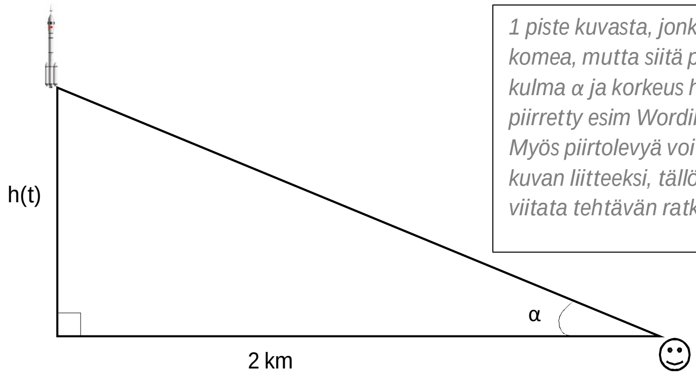
Nopeus on paikan aikaderivaatta:

$$v(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{2}{\cos^2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

1 piste oikeasta derivoinnista

Nyt kulma $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \beta$, | *1 piste*

jolloin $v(t) = \frac{2\beta}{\cos^2\alpha}$. Yksikkö on km/s. | *1 piste vastauksesta, yksikköä ei tarvitse mainita*



1 piste kuvasta, jonka ei tarvitse olla komea, mutta siitä pitää ilmetä kulma α ja korkeus h(t). Kuva voi olla piirretty esim Wordillä tai Matlabilla. Myös piirtolevyä voi käyttää ja laittaa kuvan liitteeksi, tällöin kuvaan pitää viitata tehtävän ratkaisun yhteydessä.

F. ESIMERKKIHARJOITUS

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Siltakurssi / Rahkola
Harjoitus 7
Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste

Tee tehtävät kotona mahdollisimman pitkälle, jotta voit harjoituksissa keskittyä sinulle vaikeisiin kohtiin ja pyytää niihin apua. Perustele ratkaisusi.

Tehtävät

1. Kirjoita omin sanoin, mikä on aliavaruus.
2. Todista, että matriisin A nolla-avaruus $N(A)$ on aliavaruus.
3. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
jolle
$$\operatorname{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
määritä matriisin A sarake- ja nollavaruuksien kannat, dimensiot ja matriisin A aste. Totea, että dimensiolause toteutuu.
4. Alla on matriisi A ja sen redusoitu vaakariviporrasmuoto. Määritä matriisin A sarake- ja nolla-avaruuksien kannat ja avaruuksien dimensiot.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
5. Totea, että joukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta. Mitkä ovat vektorin $\mathbf{u}$ koordinaatit tässä kannassa eli mitkä ovat sellaiset luvut c_1, c_2, c_3, joilla $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$